СОВРЕМЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
СТАТИКА
Методические указания
и контрольные задания

Рязань 2018

УДК 53(075.8)
ББК 22.3 273
Ф50

Теоретическая механика. Статика,Методические указания и контрольные задания/сост. Паршков А.В.
Совр.техн. универ-т. - Рязань, 2018. - 40 с.- 50 экз.

Рецензент: д.ф-м.н.,профессор РГУ, Н.В. Коненков

Методические указания и контрольные задания предназначены для студентов-бакалавров очной и очно - заочной форм обучения и имеют целью оказать им помощь при получении навыков решения задач по теоретической механике. Пособие содержит 4 задания по статике, которые предусмотрены программой курса теоретической механики. В начале каждого раздела в конспективной форме приводятся основные определения, формулы и теоремы, которые избавляют студентов от необходимости обращаться к другим источникам при решении задач. Примеры решения задач сопровождаются подробными пояснениями.

Печатается по решению Ученого Совета
Современного технического университета

УДК 53(075.8)
ББК 22.3 273
Ф50

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

На первом курсе студенты выполняют одну контрольную работу по разделу «Статика», которая состоит из задач С1, С2, С3, С4.

К каждой задаче дается 3 рисунка и таблица, содержащая дополнительные условия к тексту. Нумерация рисунков двойная, при этом номером рисунка является цифра, стоящая после точки. Например, рис. С1.2 – это рис. 2 к задаче С1. Номер условия от 0 до 9 проставлен в первом столбце таблицы.

Студент выполняет контрольную работу в соответствии с номером своего варианта, который ему сообщает преподаватель, ведущий практическое занятие. Номер варианта состоит из двух цифр: первая цифра соответствует номеру рисунка, а вторая – номеру условия из таблицы. Например, студент, имеющий 25 вариант, решает задачу, которой соответствует рисунок под номером 2 и в таблице номер условия 5.

Каждая контрольная работа выполняется в отдельной тетради (ученической). На обложке указываются номер контрольной работы, название дисциплины, фамилия и инициалы студента, номер группы, номер варианта. Например, «Контрольная работа № 1 по теоретической механике Петрова И.Н., группа № 261, вариант 17».

Решение каждой задачи обязательно начинать на развороте тетради, с четной страницы. Сверху указывается номер задачи. Далее делается чертеж и записывается, что в задаче дано, и что требуется определить, (текст задачи не переписывается). На каждой странице следует оставлять поля.

Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями и подробно излагать ход расчетов.

На экзамене необходимо представить зачтенные контрольные работы.

СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Статикой называется раздел теоретической механики, в котором излагается общее учение о силах и изучаются условия равновесия материальных тел, находящихся под действием сил.

Проекция силы на ось

Проекция силы на ось есть алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси (рис. 1).

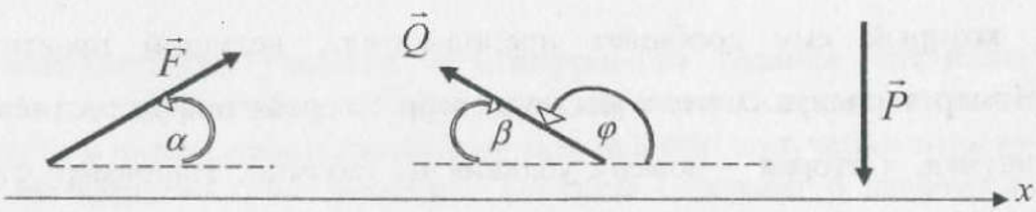


Рис. 1

$$F_x = F \cdot \cos\alpha, \quad Q_x = Q \cdot \cos\varphi = -Q \cdot \cos\beta, \quad P_x = 0.$$

Правило. Проекция силы $\vec{F}$ на ось равна произведению модуля силы F на косинус острого угла между линией действия силы и осью. Если сила и ось направлены в одну сторону, то проекция будет положительной, если в разные – отрицательной. Если сила перпендикулярна оси, то ее проекция будет равна нулю.

Пример 1. Найти проекцию силы $\vec{F}$ на координатные оси Ox и Oy, если $F = 10\ H$ (рис. 2).

$$F_x = -F\cos 60^0 = -10 \cdot 0{,}5 = -5\ H,$$
$$F_y = F\cos 30^0 = 10 \cdot 0{,}866 = 8{,}66\ H.$$

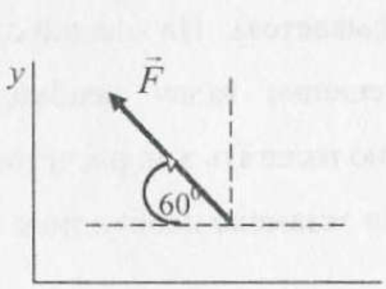


Рис. 2

Момент силы относительно точки

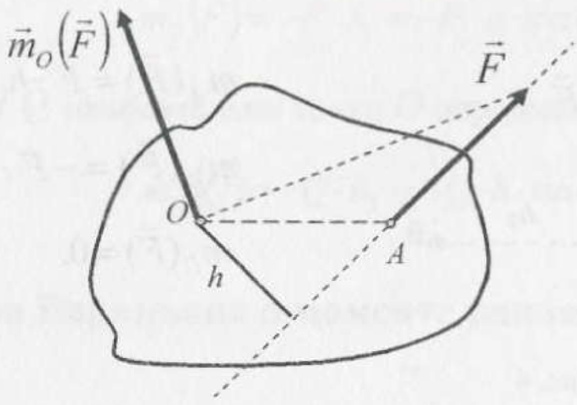


Рис. 3

Рассмотрим силу $\vec{F}$, приложенную к телу в точке A (рис. 3). Из центра O опустим перпендикуляр на линию действия силы.

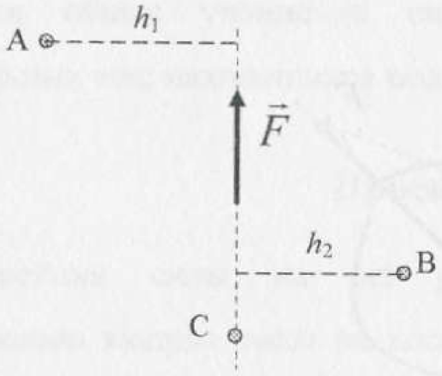
Перпендикуляр h, опущенный из центра O на линию действия силы $\vec{F}$, называется плечом силы.

Моментом силы $\vec{F}$ относительно точки O называется вектор $\vec{m}_O(\vec{F})$, модуль которого равен произведению модуля силы F на её плечо h. Вектор $\vec{m}_O(\vec{F})$ приложен в точке O и направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через точку O и силу в ту сторону, откуда сила видна стремящейся вращать свое плечо против хода стрелки часов.

Согласно этому определению $m_O(\vec{F}) = \pm F \cdot h$.

Условимся считать момент силы положительным, если сила стремится вращать свое плечо вокруг точки O против хода стрелки часов, и отрицательным, если по ходу стрелки часов.

Замечание. Одна и та же сила относительно разных точек может давать и положительный, и отрицательный момент (рис. 4):



$$m_A(\vec{F}) = F \cdot h_1,$$

$$m_B(\vec{F}) = -F \cdot h_2,$$

$$m_C(\vec{F}) = 0.$$

Рис. 4

Момент силы относительно точки C, лежащей на линии действия силы, равен нулю, так как в этом случае плечо равно нулю.

Измеряется момент силы в (Ньютон - метрах) – Нм.

Пример 2. Определить моменты сил $\vec{Q}$ и $\vec{F}$ относительно точки O (рис. 5).

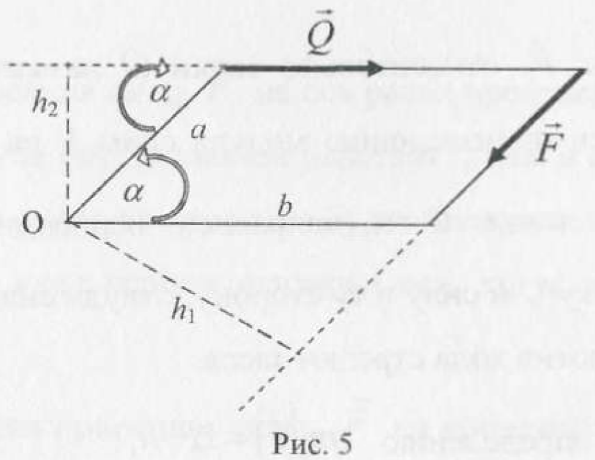


Рис. 5

Решение. Чтобы определить момент силы $\vec{F}$ относительно точки O, следует:

1. Провести линию действия силы $\vec{F}$;

2. Опустить из точки O перпендикуляр на линию действия силы, его длина равна h_1.

3. Умножить модуль силы F на h_1;

4. Перед произведением ставить знак "минус", так как сила $\vec{F}$ вращает свое плечо по ходу стрелки часов.

$$m_O(\vec{F}) = -F \cdot h_1 = -F \cdot a \cdot \sin\alpha.$$

Момент силы $\vec{Q}$ относительно точки O определяется аналогично:

$$m_O(\vec{Q}) = -Q \cdot h_2 = -Q \cdot b \cdot \sin\alpha.$$

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей

Если система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 ... \vec{F}_n)$ имеет равнодействующую $\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$, то момент равнодействующей относительно любого центра O равен сумме моментов всех сил системы относительно того же центра O:

$$m_O(\vec{R}) = \sum m_O(\vec{F}_k).$$

Пример 3. Найти момент силы $\vec{F}$ относительно точки O (рис. 6).

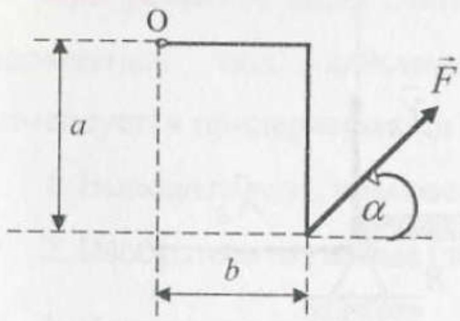


Рис. 6

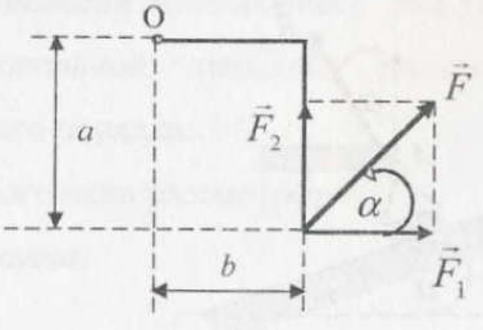


Рис. 7

Решение. Разложим силу $\vec{F}$ на составляющие $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (рис. 7), причем $F_1 = F\cos\alpha$, $F_2 = F\sin\alpha$.

Момент силы $\vec{F}$ относительно точки O найдем по теореме Вариньона:

$$m_O(\vec{F}) = m_O(\vec{F}_1) + m_O(\vec{F}_2) = F_1 a + F_2 b = F\cos\alpha \cdot a + F\sin\alpha \cdot b.$$

Условия равновесия произвольной плоской системы сил

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил на каждую координатную ось (x,y) и алгебраическая сумма моментов этих сил относительно любой точки, лежащей в плоскости действия сил, были равны нулю.

$$\sum F_{kx}=0, \quad \sum F_{ky}=0, \quad \sum m_O\left(\vec{F}_k\right)=0.$$

Опоры и опорные реакции балок

1. Шарнирно–подвижная опора (рис. 8) допускает поворот вокруг оси шарнира и линейное перемещение параллельно опорной плоскости. Если пренебречь трением на опоре и в шарнире, то реакция такой связи будет направлена перпендикулярно опорной плоскости и неизвестна только по модулю (одно неизвестное).

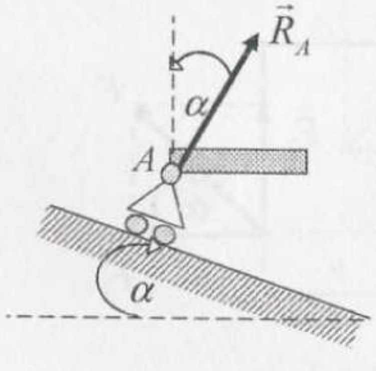


Рис. 8

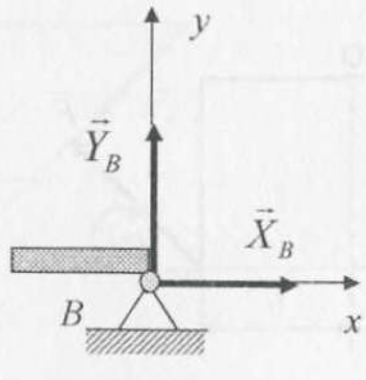


Рис. 9

2. Шарнирно–неподвижная опора (рис. 9) допускает только поворот вокруг оси шарнира и не допускает никаких линейных перемещений. Реакция такой опоры будет направлена перпендикулярно оси шарнира, модуль и направление ее заранее не известны. Обычно при решении задач такую реакцию разлагают на две взаимно перпендикулярные составляющие, не известные по модулю, но известные по направлению.

3. Жесткая заделка (рис. 10) не допускает ни линейных перемещений, ни поворотов защемленного конца балки. Поэтому реакцию жесткой заделки заменяют силой реакции $\vec{R}_A$, не известной по модулю и направлению, и парой сил m_A, момент которой также не известен. Силу реакции $\vec{R}_A$ разлагают на две взаимно перпендикулярные составляющие $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$.

Таким образом, для нахождения реакции жесткой заделки надо определить три неизвестные величины $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ и m_A.

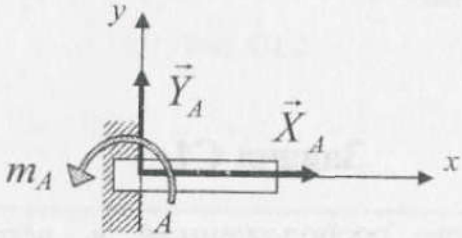


Рис. 10

Решение задач на произвольную плоскую систему сил

При решении задач статики о равновесии несвободного твердого тела, находящегося под действием произвольной плоской системы сил, рекомендуется придерживаться следующего порядка:

1. Выделить тело, равновесие которого надо рассмотреть.

2. Изобразить активные (заданные) силы.

3. Направить оси координат.

4. Освободить тело от связей, приложив соответствующие реакции. При этом необходимо убедиться, что данная задача является статически определимой.

5. Составить уравнения равновесия.

За моментные точки целесообразно брать такие точки, в которых пересекаются линии действия двух неизвестных сил. Тогда в уравнение моментов войдет только одна искомая сила.

6. Решить систему полученных уравнений равновесия относительно неизвестных величин.

Если в результате решения искомая реакция получается отрицательной, то это значит, что действительное направление реакции противоположно направлению, показанному на рисунке.

После того как задача решена, следует сделать проверку. Для этого надо составить не применявшуюся при решении сумму моментов или проекций. Равенство нулю алгебраической суммы проекций или моментов подтвердит правильность решения задачи.

Задача С1

Прямоугольная рамка, расположенная в вертикальной плоскости, закреплена в точке A шарнирно или имеет жесткую заделку, а в точке B прикреплена или к шарнирной опоре на катках, или к невесомому стержню (рис. С1.0 - С1.2). На раму действуют пара сил с моментом M = 10 Нм и две силы, значения, направления и точки приложения которых указаны в табл. С1. Определить реакции связей в точках A и B, вызываемые действующими нагрузками. При окончательных расчетах принять a = 0,5 м.

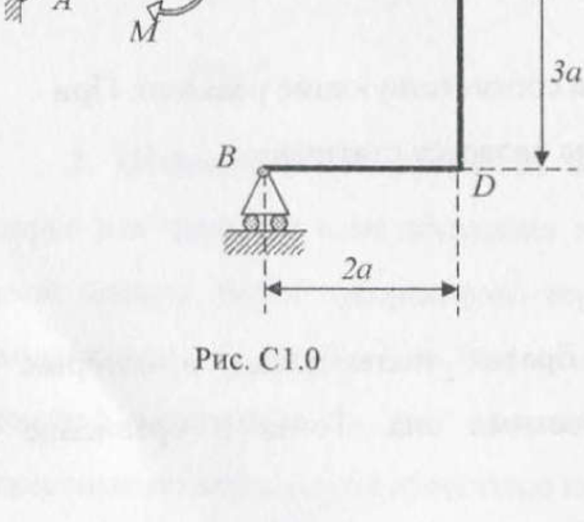


Рис. С1.0

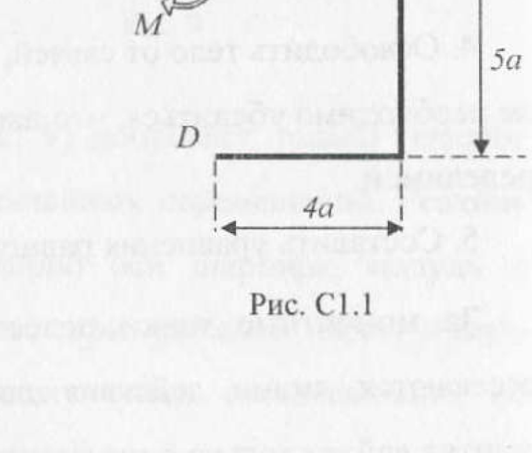


Рис. С1.1

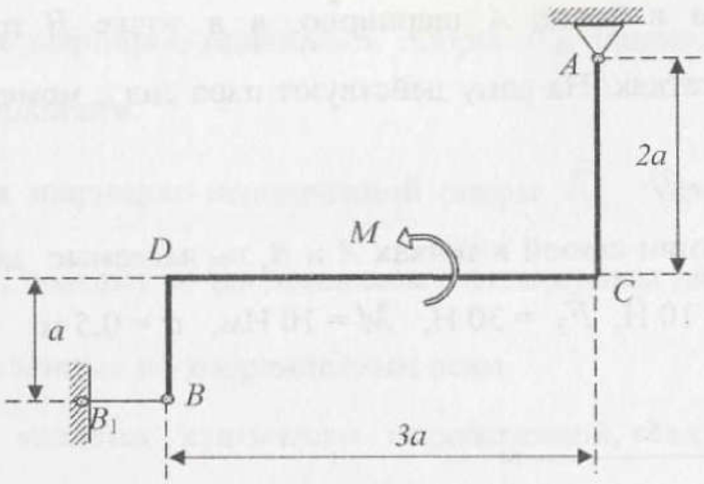
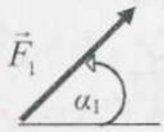
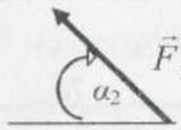
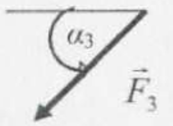
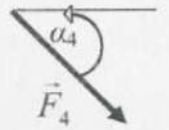


Рис. С1.2

Таблица С1

Силы								
	$F_1 = 10$Н		$F_2 = 20$Н		$F_3 = 30$Н		$F_4 = 40$Н	
Номер условия	Точка приложения	α_1, град.	Точка приложения	α_2, град.	Точка приложения	α_3, град.	Точка приложения	α_4, град.
0	*C*	30	*D*	15	-	-	-	-
1	-	-	-	-	*C*	75	*D*	30
2	*D*	60	*C*	75	-	-	-	-
3	-	-	-	-	*D*	30	*C*	15
4	*C*	15	-	-	*D*	60	-	-
5	-	-	*D*	75	-	-	*C*	60
6	*D*	75	-	-	*C*	30	-	-
7	-	-	*C*	60	-	-	*D*	75
8	*C*	30	-	-	-	-	*D*	15
9	-	-	*D*	30	C	60	-	-

Пример С1. Прямоугольная рамка, расположенная в вертикальной плоскости, закреплена в точке A шарнирно, а в точке B прикреплена к шарнирной опоре на катках. На раму действуют пара сил с моментом M и две силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_3$ (рис. С1, *а*).

Определить реакции связей в точках A и B, вызываемые действующими нагрузками, если $F_1 = 10$ Н, $F_3 = 30$ Н, $M = 10$ Нм, $a = 0{,}5$ м.

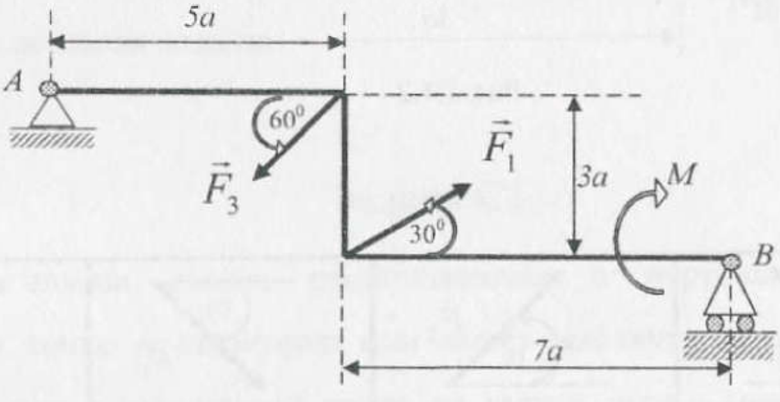


Рис. С1, *а*

Решение.

1. Рассмотрим равновесие прямоугольной рамки (рис. С1, *б*).

2. Изображаем активные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_3$ и пару сил с моментом M.

3. Из точки A проведем координатные оси x и y.

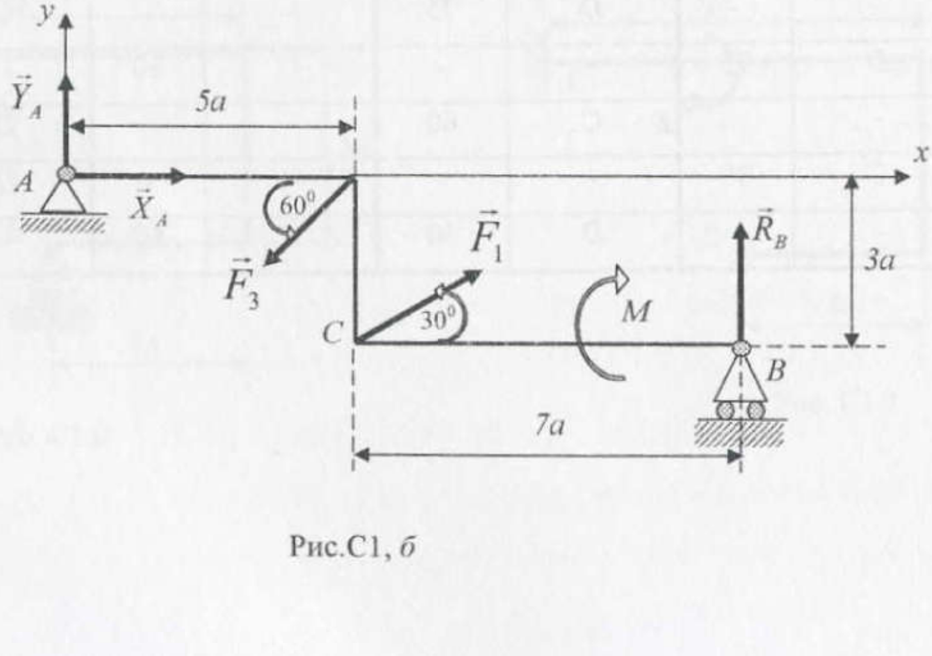


Рис.С1, *б*

4. Освобождаем рамку от связей, приложив соответствующие реакции.

Реакция шарнирно-подвижной опоры $\vec{R}_B$ направлена перпендикулярно опорной поверхности.

Реакция шарнирно-неподвижной опоры $\vec{R}_A$ неизвестна по модулю и направлению, поэтому ее представляем в виде суммы двух составляющих $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленных по координатным осям.

Задача является статически определенной, так как мы имеем три неизвестные реакции связи $\vec{R}_B$, $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, и для равновесия произвольной плоской системы сил должны составить три уравнения равновесия.

1. Составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = X_A + F_1 \cos 30^0 - F_3 \cos 60^0 = 0,$$
$$\sum F_{ky} = Y_A + R_B + F_1 \cos 60^0 - F_3 \cos 30^0 = 0,$$
$$\sum m_A\left(\vec{F}_k\right) = -F_3 \cos 30^0 \cdot 5a + F_1 \cos 30^0 \cdot 3a + F_1 \cos 60^0 5a + R_B \cdot 12a - M = 0.$$

2. Решаем полученную систему уравнений.

Из первого уравнения находим:

$$X_A = -F_1 \cos 30^0 + F_3 \cos 60^0 = -10 \cdot 0{,}866 + 30 \cdot 0{,}5 = 6{,}34\ H.$$

Из третьего уравнения находим:

$$R_B \cdot 12a = F_3 \cos 30^0 \cdot 5a - F_1 \cos 30^0 \cdot 3a - F_1 \cos 60^0 5a + M,$$
$$R_B = \frac{F_3 \cos 30^0 \cdot 5a - F_1 \cos 30^0 \cdot 3a - F_1 \cos 60^0 5a + M}{12a} =$$
$$= \frac{30 \cdot 0{,}866 \cdot 5 \cdot 0{,}5 - 10 \cdot 0{,}866 \cdot 3 \cdot 0{,}5 - 10 \cdot 0{,}5 \cdot 5 \cdot 0{,}5 + 10}{12 \cdot 0{,}5} = 8{,}24\,H.$$

Из второго уравнения находим:

$$Y_A = -R_B - F_1 \cos 60^0 + F_3 \cos 30^0 = -10 \cdot 0{,}5 + 30 \cdot 0{,}866 - 8{,}24 = 12{,}74\ H.$$

Тогда

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{6{,}34^2 + 12{,}74^2} = 14{,}23\ H.$$

Ответ: $R_A = 14{,}23\ H$, $R_B = 8{,}24\ H$.

РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ФЕРМ

При перекрытии больших пролетов (мосты, промышленные здания и т.п.) и в крупных строительных кранах часто применяются сквозные конструкции, называемые фермами.

Фермой называется жесткая конструкция из прямолинейных стержней, соединенных на концах шарнирами. Если все стержни фермы лежат в одной плоскости, ферму называют плоской. Места соединения стержней фермы называют узлами.

Все внешние нагрузки к ферме прикладываются только в узлах. При расчете фермы трением в узлах и весом стержней пренебрегают. Стержни фермы работают только на растяжение или на сжатие. Ограничимся рассмотрение жестких плоских ферм, без лишних стержней, образованных из треугольников. В таких фермах число стержней m и число узлов n связаны соотношением

$$m = 2n\text{-}3.$$

Если $m>2n$-3, то ферма статически неопределимая;

если $m<2m$-3, конструкция перестает быть геометрически неизменяемой, получает подвижность (становится механизмом).

Расчет ферм сводится к определению опорных реакция и усилий в ее стержнях.

Опорные реакции находят обычными методами статики, рассматривая ферму в целом как твердое тело.

Усилия в стержнях можно определить двумя методами.

Метод вырезания узлов. Этим методом удобно пользоваться, когда надо найти усилия во всех стержнях фермы. Он сводится к последовательному рассмотрению условий равновесия сил, сходящихся в каждом узле.

При решении задач методом вырезания узлов рекомендуется такая последовательность действий:

1. определить реакции опор, пользуясь уравнениями равновесия для всей фермы, рассматривая её как твердое тело;

2. вырезать узел, в котором сходятся два стержня, и, рассматривая его равновесие под действием активных сил и реакций разрезанных стержней; определить эти реакции из двух уравнений проекций сил, приложенных к узлу, на декартовы оси координат;

3. переходя от узла к узлу, рассматривать аналогично равновесие каждого узла; при этом в каждом узле должно быть только два неизвестных усилия в стержнях.

Метод сечений (метод Риттера). Этим методом удобно воспользоваться для определения усилий в отдельных стержнях фермы, в частности для проверочных расчетов. Идея метода состоит в том, что ферму разделяют на две части сечением, проходящем через три стержня, в которых (или в одном из которых) требуется определить усилия, и рассматривают равновесие одной из этих частей. Действие отброшенной части заменяют соответствующими силами, направляя их вдоль разрезанных стержней от узлов, т.е. считая стержни растянутыми. Затем составляют уравнения равновесия, беря центры моментов (или ось проекций) так, чтобы в каждое уравнение вошло только одно неизвестное усилие.

При расчете ферм методом сечений рекомендуется такая последовательность действий:

1. определить реакции опор, пользуясь уравнениями равновесия для всей фермы, рассматривая её как твердое тело;

2. разрезать мысленно ферму, к которой приложены все внешние силы, на две части так, чтобы число разрезанных стержней не превышало трех, и заменить действие отброшенной части, искомыми усилиями стержней, полагая, все стержни растянутыми;

3. составить уравнения равновесия для части фермы так, чтобы в каждое уравнение входило одно неизвестное усилие. Для этого нужно составлять

уравнение моментов относительно точек, где пересекаются линии действия двух неизвестных усилий; или, если два стержня параллельны, то можно составить уравнение проекций на ось, перпендикулярную к этим стержням, в которое также войдет одно неизвестное усилие;

4. решая каждое из составленных уравнений, найти искомые усилия в стержнях; если в ответе получается знак «минус», то это означает, что стержень сжат, а не растянут.

ЗАДАЧА С2

Определить реакции опор фермы от заданной нагрузки, а так же усилия в стержнях методом вырезания узлов и методом сечений. Схемы ферм показаны на рис. С2.0 – С2.2. Необходимые для расчета данные приведены в табл. С2.

Таблица С2

Силы	$\vec{P}_1$ ↓	$\vec{P}_2$ →	$\vec{P}_3$ ←	h_1, м	h_2, м	Номера стержней
Номер условия	$P_1 = 5$ кН	$P_2 = 10$ кН	$P_3 = 15$ кН			
	Точка приложения силы					
0	*K*	*C*	*M*	2	4	4, 5, 6
1	*E*	*M*	*C*	4	2	8, 9, 10
2	*K*	*C*	*M*	5	3	4, 5, 6
3	*E*	*M*	*C*	3	5	8, 9, 10
4	*K*	*C*	*M*	1	3	4, 5, 6
5	*E*	*M*	*C*	3	1	8, 9, 10
6	*K*	*C*	*M*	5	2	4, 5, 6
7	*E*	*M*	*C*	2	5	8, 9, 10
8	*K*	*C*	*M*	2	3	4, 5, 6
9	*E*	*M*	*C*	3	2	8, 9, 10

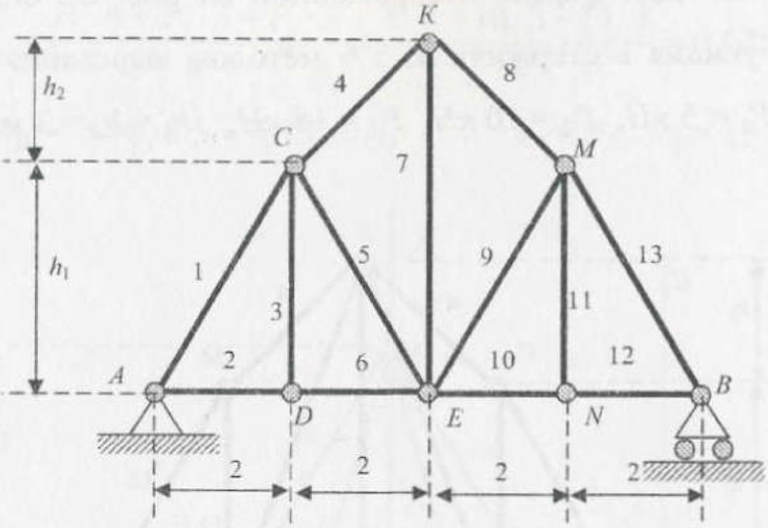


Рис. С2. 0

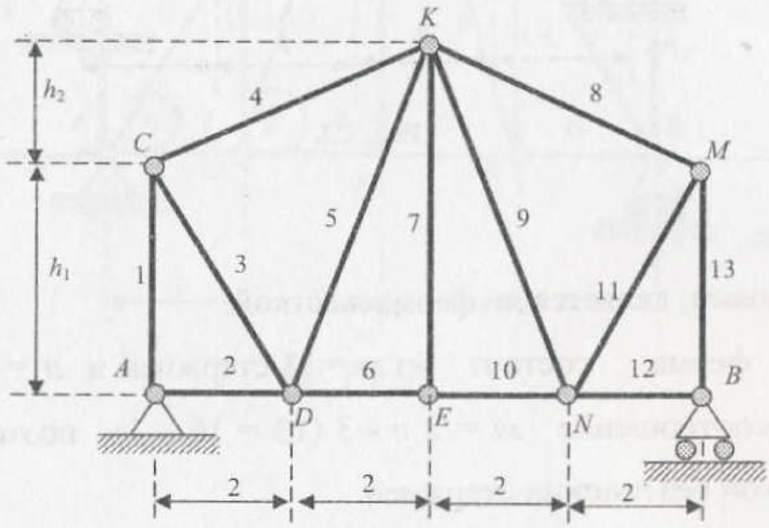


Рис. С2.1

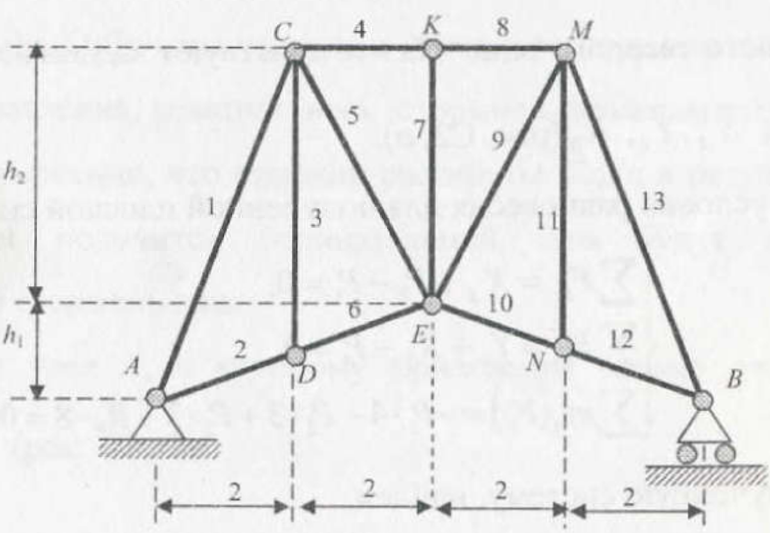


Рис. С2. 2

Пример С2. Для фермы изображенной на рис. С2 определить реакции опор, а также усилия в стержнях 4, 5 6 методом вырезания узлов и методом сечений, если $P_1 = 5\ кН$, $P_2 = 10\ кН$, $P_3 = 15\ кН$, $h_1 = h_2 = 3$ м.

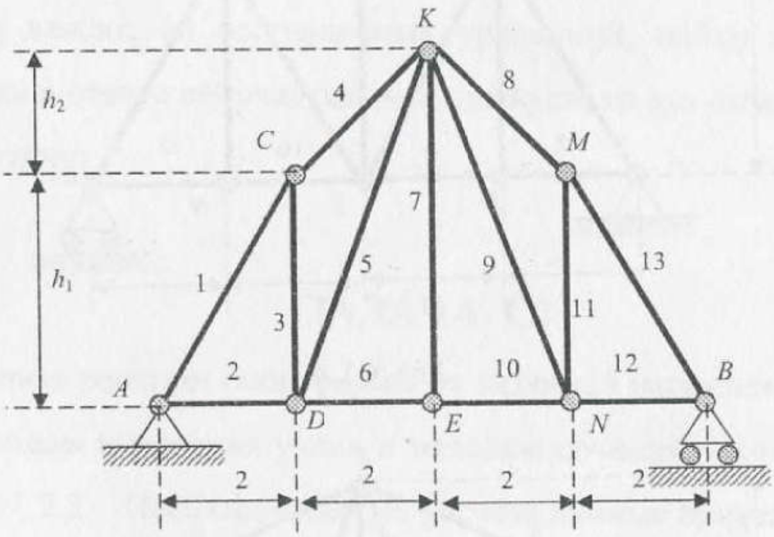


Рис. С2.

Решение.

1. Установим, является ли ферма жесткой.

Данная ферма состоит из $m = 13$ стержней и $n = 8$ узлов и для нее выполняется соотношение $m = 2\ n - 3$ $(13 = 16 - 3)$, поэтому данная ферма является жесткой без лишних стержней.

2. Определение реакций опор.

Для определения опорных реакций рассмотрим равновесие фермы в целом как единого твердого тела. На нее действуют заданные силы $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ и реакции связей $\vec{X}_A, \vec{Y}_A,\ \vec{R}_B$ (рис. С2, *а*).

Составим условия равновесия для полученной плоской системы сил:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = X_A + P_2 - P_3 = 0, \\ \sum F_{ky} = Y_A + R_B - P_1 = 0, \\ \sum m_A\left(\vec{F}_k\right) = -P_1 \cdot 4 - P_2 \cdot 3 + P_3 \cdot 3 + R_B \cdot 8 = 0. \end{cases}$$

Решая полученную систему, найдем

$$R_B = \frac{P_1 \cdot 4 + P_2 \cdot 3 - P_3 \cdot 3}{8} = \frac{5 \cdot 4 + 10 \cdot 3 - 15 \cdot 3}{8} = 0{,}625 \quad кН.$$

$$Y_A = P_1 - R_B = 5 - 0{,}625 = 4{,}375 \ кН, \qquad X_A = P_3 - P_2 = 15 - 10 = 5 \ кН.$$

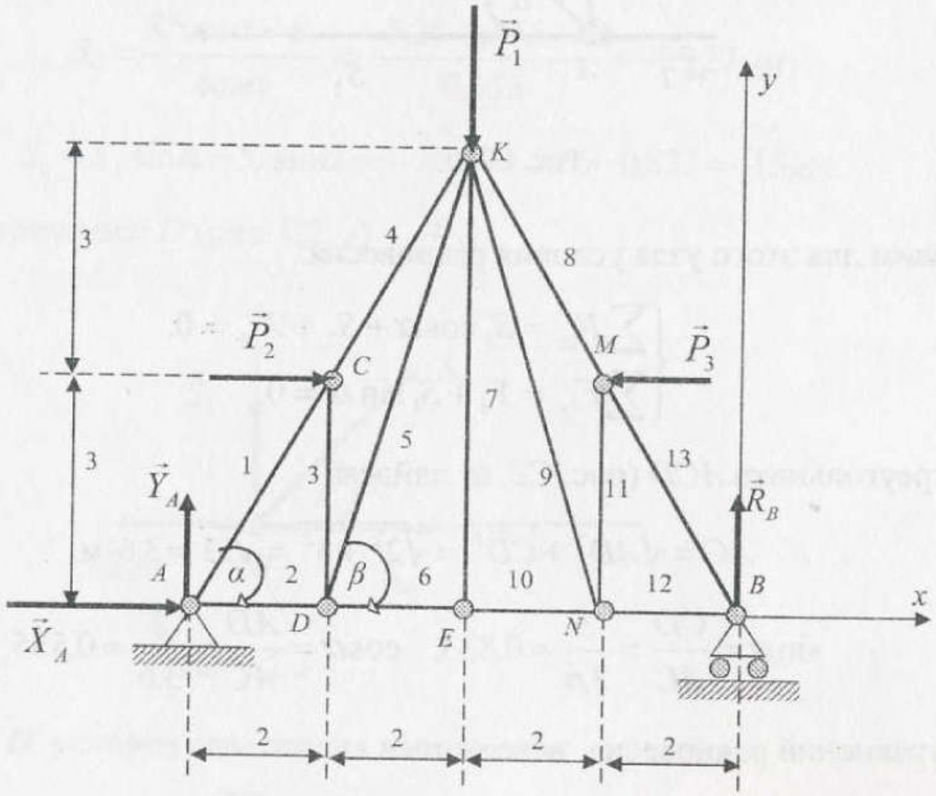


Рис. С2, *а*.

3. Определение усилий в стержнях фермы методом вырезания узлов.

Стержни, сходящиеся в узле фермы, являются для данного узлового соединения связями. Отбросим мысленно связи и заменим их действие на узлы реакциями. Направления реакций всех стержней покажем от узлов внутрь стержня в предположении, что стержни растянуты. Если в результате решения реакция стержня получится отрицательной, это будут означать, что соответствующий стержень сжат.

Рассмотрим узел *А*, к которому приложены только два неизвестных усилия $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$ (рис. С2, *б*).

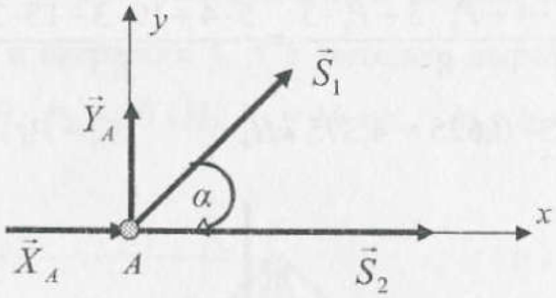


Рис. С2, *б*

Составим для этого узла условия равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = S_1 \cos\alpha + S_2 + X_A = 0, \\ \sum F_{ky} = Y_A + S_1 \sin\alpha = 0. \end{cases}$$

Из треугольника ACD (рис. С2, *а*) найдем

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} = 3{,}6 \text{ м},$$

$$\sin\alpha = \frac{CD}{AC} = \frac{3}{3{,}6} = 0{,}833, \quad \cos\alpha = \frac{AD}{AC} = \frac{2}{3{,}6} = 0{,}555.$$

Из уравнений равновесия находим:

$$S_1 = -\frac{Y_A}{\sin\alpha} = -\frac{4{,}375}{0{,}833} = -5{,}25 \ кН.$$

$$S_2 = -X_A - S_1 \cdot \cos\alpha = -5 + 5{,}25 \cdot 0{,}555 = -2{,}1 \ кН$$

Зная $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$, перейдем к узлу C (рис. С2, *в*).

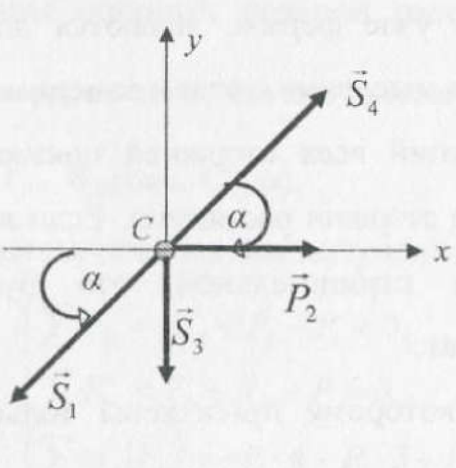


Рис. С2,*в*

Условия равновесия имеют вид:

$$\begin{cases}\sum F_{kx} = S_4\cos\alpha - S_1\cos\alpha + P_2 = 0,\\ \sum F_{ky} = -S_3 - S_1\sin\alpha + S_4\sin\alpha = 0.\end{cases}$$

Решая полученные уравнения, найдем

$$S_4 = \frac{S_1\cos\alpha - P_2}{\cos\alpha} = \frac{-5{,}25\cdot 0{,}555 - 10}{0{,}555} = -23{,}27\,кН,$$

$$S_3 = S_4\sin\alpha - S_1\sin\alpha = (-23{,}27 + 5{,}25)\cdot 0{,}833 = -15\,кН.$$

Рассмотрим узел D (рис. С2, *г*)

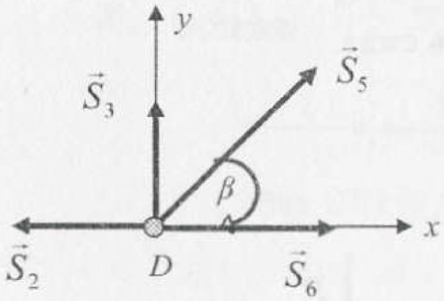


Рис. С2, *г*

Для узла D условия равновесия имеют вид:

$$\begin{cases}\sum F_{kx} = S_5\cos\beta + S_6 - S_2 = 0,\\ \sum F_{ky} = S_3 + S_5\sin\beta = 0.\end{cases}$$

Из треугольника DEK (рис. С2, *а*) найдем

$$DK = \sqrt{ED^2 + EK^2} = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 36} = 6{,}32 \text{ м},$$

$$\sin\beta = \frac{KE}{DK} = \frac{6}{6{,}32} = 0{,}949, \quad \cos\beta = \frac{ED}{DK} = \frac{2}{6{,}32} = 0{,}316\,.$$

Из уравнений равновесия находим

$$S_5 = -\frac{S_3}{\sin\beta} = \frac{15}{0{,}949} = 5{,}81\,кН,$$

$$S_6 = S_2 - S_5\cos\beta = -2{,}1 - 15{,}81\cdot 0{,}316 = -7{,}1\ кН.$$

Таким образом, усилия в стержнях 4, 5 и 6 равны:

S_4 = -23,27 *кН*, S_5 = 15,81 *кН*, S_6 = -7,1 *кН*.

Знаки усилий показывают, что стержень 5 растянут, а стержни и 4 и 6 – сжаты.

4. Определение усилий в стержнях методом сечений.

Для определения усилий S_4, S_5 и S_6 мысленно разрежем ферму сечением $a-a$ (рис. С2, *д*) и рассмотрим левую часть фермы (рис. С2, *е*). Действие отброшенной правой части на левую представим силами $\vec{S}_4$, $\vec{S}_5$, $\vec{S}_6$.

По-прежнему условно предполагаем, что стержни растянуты. Знак минус в ответе укажет на то, что стержень сжат.

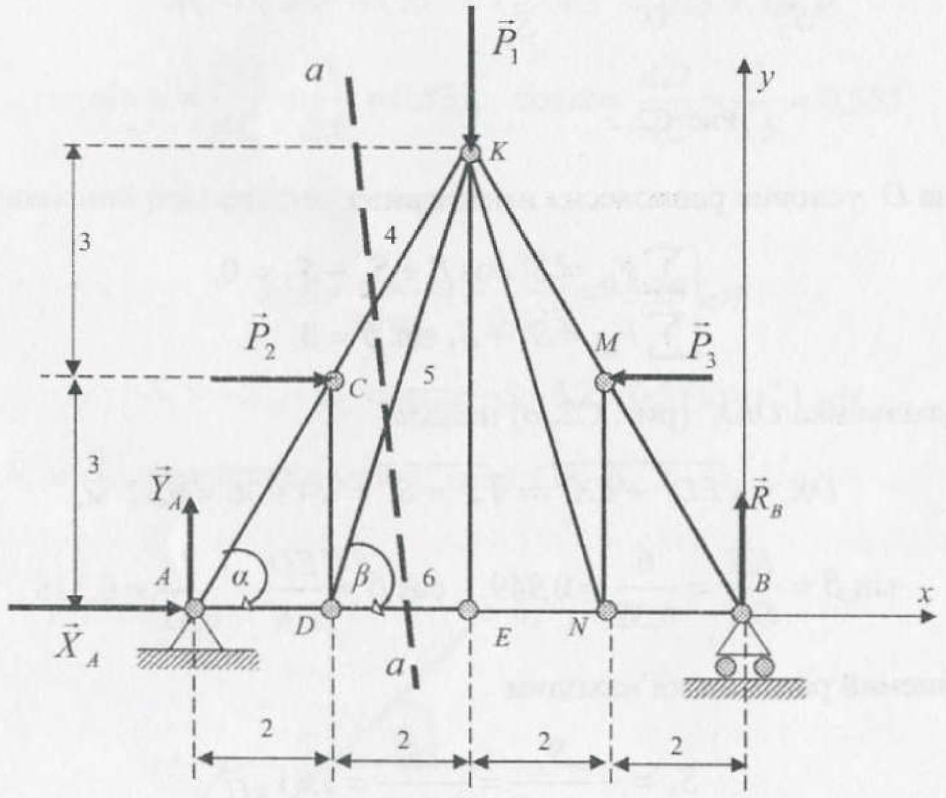


Рис. С2, *д*

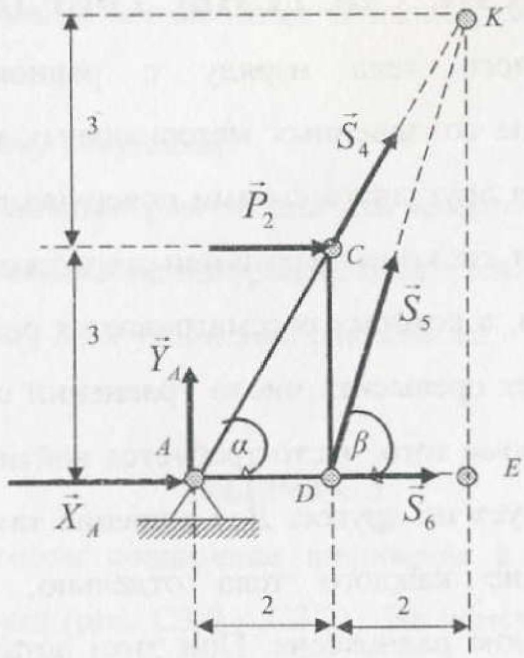


Рис. С2, *е*

Усилие S_5 найдем из уравнения

$$\sum m_A\left(\vec{F}_k\right) = -P_2 \cdot 3 + S_5 \sin\beta \cdot 2 = 0.$$

$$S_5 = \frac{3P_2}{2\sin\beta} = \frac{10 \cdot 3}{2 \cdot 0{,}949} = 15{,}81 \ кН.$$

Для определения S_6 составим уравнение

$$\sum m_K\left(\vec{F}_k\right) = S_6 \cdot 6 + P_2 \cdot 3 + X_A \cdot 6 - Y_A \cdot 4 = 0.$$

$$S_6 = \frac{-X_A \cdot 6 + Y_A \cdot 4 - P_2 \cdot 3}{6} = \frac{-5 \cdot 6 + 4{,}375 \cdot 4 - 10 \cdot 3}{6} = -7{,}1 \ кН.$$

Усилие S_4 найдем из уравнения

$$\sum m_D\left(\vec{F}_k\right) = -Y_A \cdot 2 - P_2 \cdot 3 - S_4 \cos\alpha \cdot 3 = 0.$$

$$S_4 = \frac{-Y_A \cdot 2 - P_2 \cdot 3}{3\cos\alpha} = \frac{-4{,}375 \cdot 2 - 10 \cdot 3}{3\cos\alpha} = -23{,}27 \ кН.$$

Ответ: $S_4 = -23{,}27 \ кН$, $S_5 = 15{,}81 \ кН$, $S_6 = -7{,}1 \ кН$.

РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

В статике твердого тела наряду с равновесием одного тела рассматриваются системы сочлененных материальных тел, т.е. совокупности твердых тел, касающихся друг друга своими поверхностями или соединенных друг с другом шарнирами, гибкими нитями или стержнями.

При решении задач, в которых рассматривается равновесие системы тел, число неизвестных может превысить число уравнений статики, составленных для системы в целом. Кроме того, часто требуется найти силу, с которой одно сочлененное тело действует на другое. Для решения таких задач необходимо рассматривать равновесие каждого тела отдельно, составляя для него соответствующие уравнения равновесия. При этом остальные тела составной системы являются связями, наложенными на рассматриваемое тело. Метод, основанный на рассмотрении равновесия отдельных частей системы твердых тел, называют методом расчленения.

Задачи на равновесие системы сочлененных тел, находящихся под действием произвольной плоской системы сил, рекомендуется решать в следующем порядке:

1. Выделить систему сочлененных тел, равновесие которых нужно рассмотреть.

2. Изобразить активные (заданные) силы.

3. Отбросить связи, заменив их реакциями связей.

4. Убедиться в том, что систему в целом, как одно твердое тело, решить нельзя (число неизвестных более трех).

5. Наметить общий путь решения, т.е. принять, как целесообразнее расчленить данную систему: рассматривать равновесие каждого из сочлененных тел отдельно или же всей системы в целом и некоторых тел. Определить общее количество искомых сил.

Затем необходимо определить общее количество независимых уравнений равновесия, которые можно составить при данном расчленении. В статически определимой задаче число неизвестных должно равняться числу уравнений равновесия.

6. Выбрать систему координат.

7. Составить уравнения равновесия для каждого твердого тела или для каждой системы тел, равновесие которых исследуется.

8. Решить систему всех уравнений равновесия.

Задача С3

Балка BC и уголок соединены шарниром в точке C или свободно опираются друг на друга (рис. С3.0 – С3.2). На конструкцию действует пара сил с моментом M = 20 Нм, равномерно распределенная нагрузка интенсивности q = 5 Н/м и две силы. Эти силы, их направления и точки приложения указаны в табл. С3.

Определить реакции связей в точках A, B и C, вызванные действующими нагрузками. При окончательных расчетах принять a = 0,5 м.

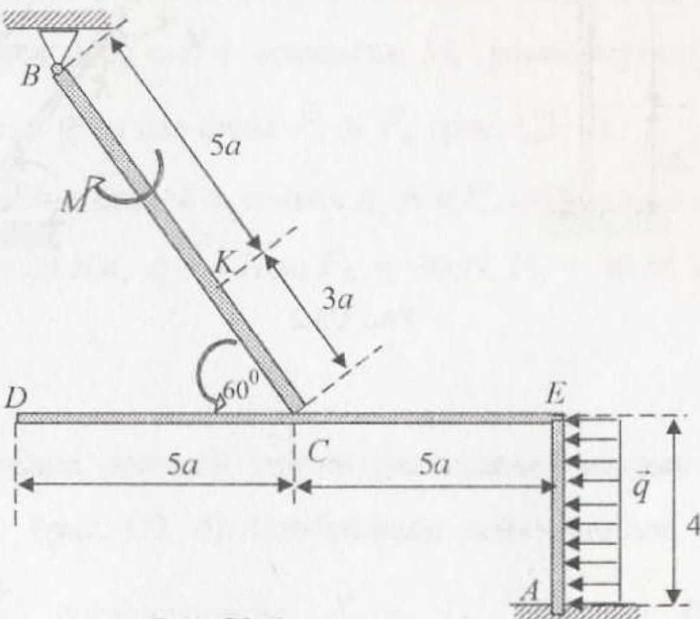


Рис. С3. 0

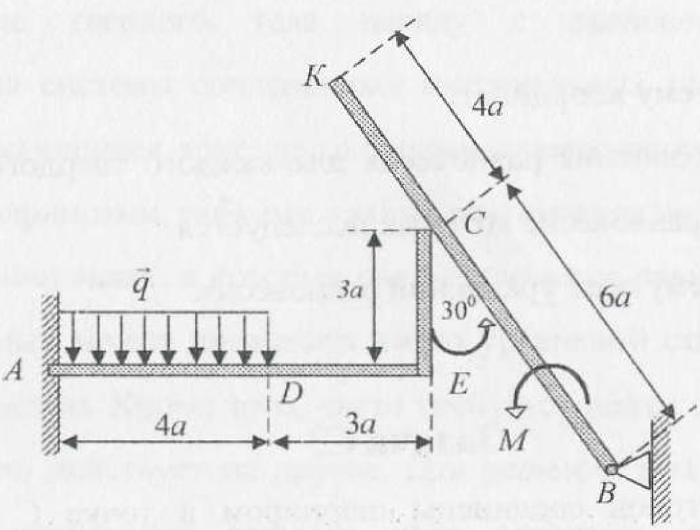


Рис.С3.1

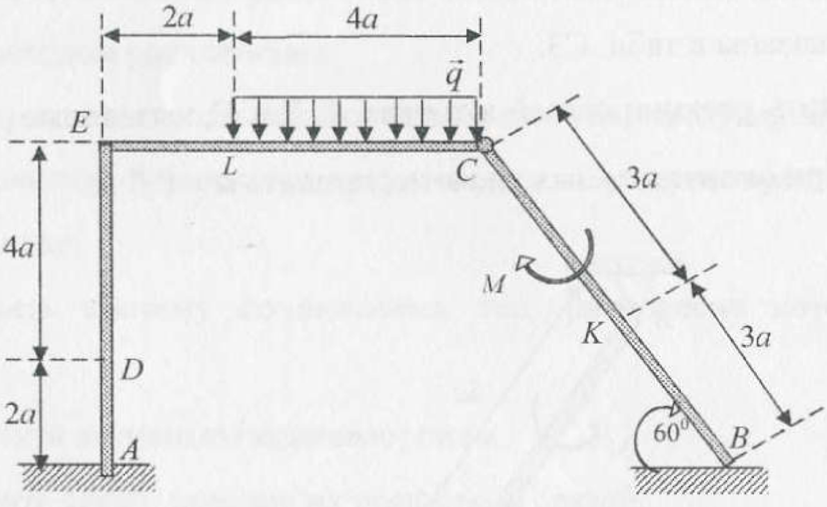
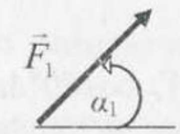
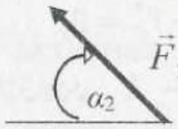
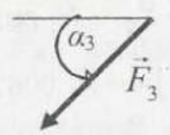
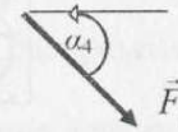


Рис. С3.2

Таблица С3

Силы								
	$F_1 = 10\ H$		$F_2 = 20\ H$		$F_3 = 30\ H$		$F_4 = 40\ H$	
Номер условия	Точка приложения	α_1, град.	Точка приложения	α_2, град.	Точка приложения	α_3, град.	Точка приложения	α_4, град.
0	*K*	60	-	-	*E*	30	-	-
1	-	-	*D*	60	-	-	*K*	30
2	-	-	*K*	30	*D*	60	-	-
3	*D*	30	-	-	*K*	60	-	-
4	*K*	60	-	-	-	-	*D*	30
5	*E*	60	*K*	30	-	-	-	-
6	-	-	-	-	*K*	30	*E*	60
7	-	-	*E*	60	-	-	*K*	30
8	*K*	30	*D*	60	-	-	-	-
9	-	-	-	-	*K*	60	*E*	30

Пример С3. Балка BC и уголок соединены шарниром в точке C. На конструкцию действуют пара сил с моментом M, равномерно распределенная нагрузка интенсивности $\vec{q}$ и две силы $\vec{F}_3$ и $\vec{F}_4$ (рис. С3, *а*).

Определить реакции связей в точках A, B и C, вызванные действующими нагрузками, если $M = 20\ Нм$, $q = 5\ Н/м$, $F_3 = 30\ Н$, $F_4 = 40\ Н$, $a = 0{,}5\ м$.

Решение.

1. Для определения реакций связей расчленим систему и рассмотрим равновесие балки BC (рис. С3, *б*). Изображаем действующие на балку силы: активную силу $\vec{F}_3$, составляющие $\vec{X}_B$ и $\vec{Y}_B$ шарнира B, $\vec{X}_C$ и $\vec{Y}_C$, составляющие шарнира C. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = X_B - F_3 \cos 60^0 - X_C = 0, \\ \sum F_{ky} = -Y_B - F_3 \cos 30^0 + Y_C = 0, \\ \sum m_B\left(\vec{F}_k\right) = -F_3 \cos 30^0 2a - X_C \cos 30^0 4a + Y_C \cos 60^0 4a = 0. \end{cases}$$

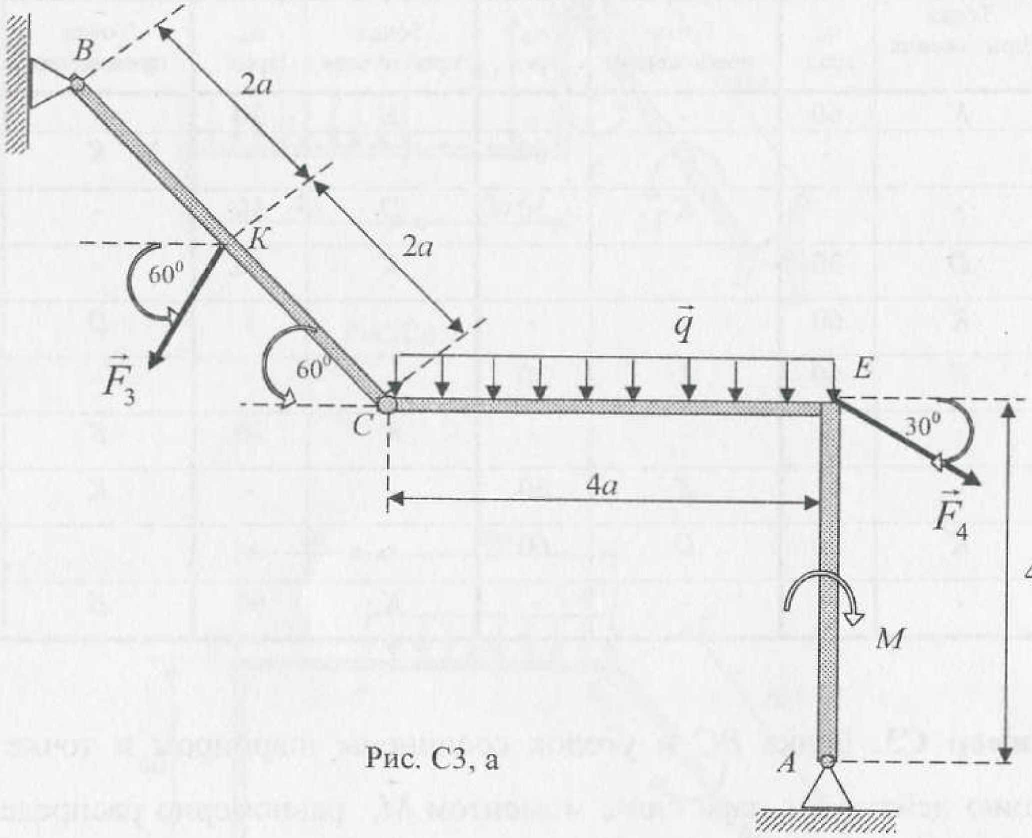


Рис. С3, а

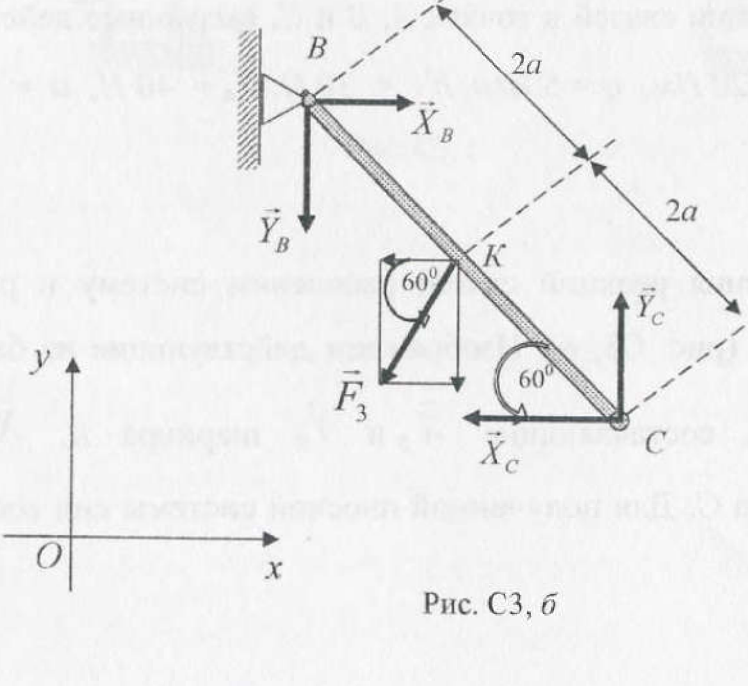


Рис. С3, *б*

2. Теперь рассмотрим равновесие уголка (рис. С3, *в*). На тело действуют пара сил с моментом M, активная сила $\vec{F}_4$, равномерно распределенная нагрузка, которую заменим силой $\vec{Q}$, приложенной в середине участка CE (численно $Q = q \cdot 4a = 5 \cdot 4 \cdot 0{,}5 = 10\,H$). Реакцию шарнира A разложим на составляющие $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$. Реакцию шарнира C представим в виде двух составляющих $\vec{X}_C^1$ и $\vec{Y}_C^1$, которые, согласно аксиоме статики о равенстве действия и противодействия, равны по модулю и противоположны по направлению силам $\vec{X}_C$ и $\vec{Y}_C$, т.е. $\vec{X}_C = -\vec{X}_C^1$, $\vec{Y}_C = -\vec{Y}_C^1$.

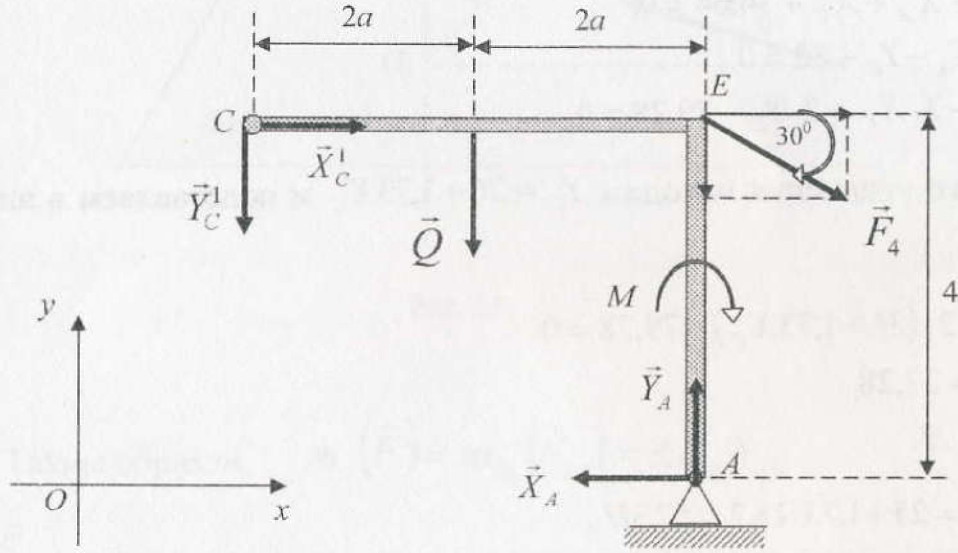


Рис. С3, *в*

Для этой плоской системы сил составим три уравнения равновесия:

$$
\begin{cases}
\sum F_{kx} = -X_A + F_4 \cos 30^0 + X_C^1 = 0, \\
\sum F_{ky} = Y_A - Q - F_4 \cos 60^0 - Y_C^1 = 0, \\
\sum m_A\left(\vec{F}_k\right) = -M - F_4 \cos 30^0 \cdot 4a + Q \cdot 2a - X_C^1 \cdot 4a + Y_C^1 \cdot 4a = 0.
\end{cases}
$$

3. Решаем полученные системы уравнений. Подставим данные задачи в уравнения:

$$\begin{cases} X_B - X_C - 30\cdot 0{,}5 = 0, \\ -Y_B + Y_C - 30\cdot 0{,}866 = 0, \\ -X_C\cdot 0{,}866\cdot 4\cdot 0{,}5 + Y_C\cdot 0{,}5\cdot 4\cdot 0{,}5 - 30\cdot 0{,}866\cdot 2\cdot 0{,}5 = 0, \\ -X_A + X_C + 40\cdot 0{,}866 = 0, \\ Y_A - Y_C - 10 - 40\cdot 0{,}5 = 0, \\ -X_C\cdot 4\cdot 0{,}5 + Y_C\cdot 4\cdot 0{,}5 + 10\cdot 2\cdot 0{,}5 - 20 - 40\cdot 0{,}866\cdot 4\cdot 0{,}5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_B - X_C - 15 = 0, \\ -Y_B + Y_C - 26 = 0, \\ -X_C\cdot 1{,}73 + Y_C - 26 = 0, \\ -X_A + X_C + 34{,}64 = 0, \\ Y_A - Y_C - 30 = 0, \\ -2\cdot X_C + 2\cdot Y_C - 79{,}28 = 0. \end{cases}$$

Из третьего уравнения находим $Y_C = 26 + 1{,}73X_C$ и подставляем в шестое уравнение:

$$-2\cdot X_C + 2\cdot(26 + 1{,}73X_C) - 79{,}28 = 0$$
$$1{,}46\cdot X_C = 27{,}28,$$
$$X_C = 18{,}7\ H.$$

Тогда $Y_C = 25 + 1{,}73\cdot 18{,}7 = 57{,}3H$.

Их первого уравнения найдем: $X_B = 15 + X_C = 15 + 18{,}7 = 33{,}7H$.

Из второго уравнения $Y_B = Y_C - 26 = 57{,}3 - 26 = 31{,}3\ H$.

Из четвертого уравнения $X_A = 34{,}64 + X_C = 34{,}64 + 18{,}7 = 53{,}3\ H$.

Из пятого уравнения $Y_A = 30 + Y_C = 30 + 57{,}3 = 87{,}3\ H$.

Ответ: $X_A = 53{,}34\ H$, $Y_A = 87{,}3\ H$, $X_B = 33{,}7\ H$, $Y_B = 31{,}3\ H$,
$X_C = 18{,}7\ H$, $Y_C = 57{,}3\ H$.

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

Момент силы относительно оси

Момент силы $\vec{F}$ относительно оси z равен алгебраическому моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси z, взятому относительно точки пересечения оси с этой плоскостью (рис. 11).

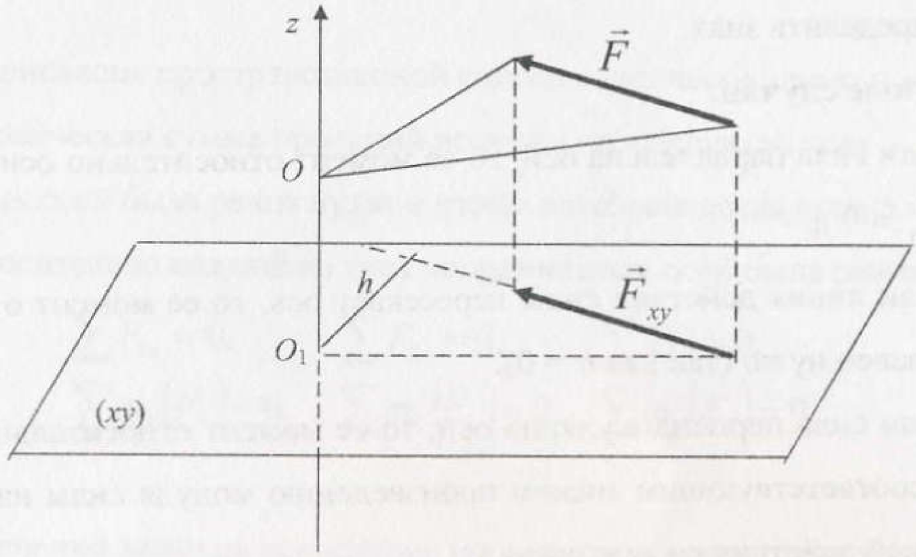


Рис. 11

Таким образом, $m_z(\vec{F}) = m_{O_1}(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} h$,

где $\vec{F}_{xy}$ – проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси z, h – длина перпендикуляра, опущенного из точки O_1 на линию действия проекции силы, т.е. кратчайшее расстояние между линией действия силы и осью.

Момент силы относительно оси будет положительным, когда с положительного конца оси поворот, который стремится совершить сила, виден происходящим против хода стрелки часов и отрицательным, – когда по ходу часовой стрелки.

Для того чтобы вычислить момент силы относительно оси z, нужно:

1. Провести плоскость (xy), перпендикулярную оси z (в любом месте);

2. Спроектировать силу $\vec{F}$ на эту плоскость и найти величину $\vec{F}_{xy}$;

3. Опустить из точки пересечения оси z с плоскостью (это точка O_1) перпендикуляр на линию действия и найти его длину h;

4. Вычислить произведение $F_{xy} \cdot h$;

5. Определить знак.

Частные случаи:

1. Если сила параллельна оси, то ее момент относительно оси равен нулю (так как $F_{xy} = 0$);

2. Если линия действия силы пересекает ось, то ее момент относительно оси также равен нулю (так как $h = 0$).

3. Если сила перпендикулярна оси, то ее момент относительно оси равен взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на расстояние между линией действия силы и осью.

Пример. Найти моменты сил $\vec{F}$ и $\vec{Q}$ относительно осей x, y, z, приложенных к параллелепипеду со сторонами a, b, c (рис. 12).

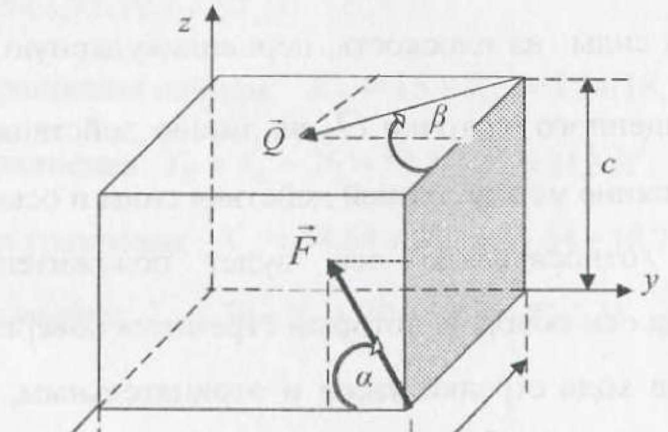


Рис. 12

Решение. $m_x(\vec{Q})+m_x(\vec{F})=c\cdot Q\sin\beta+b\cdot F\sin\alpha,$

$$m_y(\vec{Q})+m_y(\vec{F})=c\cdot Q\cos\beta-a\cdot F\sin\alpha,$$

$$m_z(\vec{Q})+m_z(\vec{F})=-b\cdot Q\cos\beta-a\cdot F\cos\alpha.$$

Аналитические условия равновесия пространственной системы сил

Для равновесия пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил на каждую из трех координатных осей была равна нулю и чтобы алгебраическая сумма моментов всех сил относительно каждой из трех координатных осей была равна нулю, т.е.

$$\sum F_{kx}=0,\qquad \sum F_{ky}=0,\qquad \sum F_{kz}=0,$$
$$\sum m_x(\vec{F}_k)=0,\quad \sum m_y(\vec{F}_k)=0,\quad \sum m_z(\vec{F}_k)=0.$$

При решении задач на равновесие произвольной пространственной системы сил рекомендуется придерживаться следующего порядка:

1. Выделить тело, равновесие которого следует рассмотреть;

2. Изобразить активные (заданные) силы;

3. Освободить тело от связей, заменив их реакциями. Число неизвестных не должно быть более шести, иначе задача будет статически неопределимой;

4. Выбрать систему координат;

5. Составить уравнения равновесия;

6. Решить полученные уравнения относительно неизвестных.

После решения системы уравнений необходимо провести проверку, составив сумму моментов относительно какой - либо оси, отличной от принятых для решения задачи.

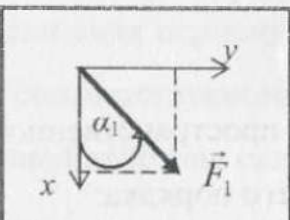
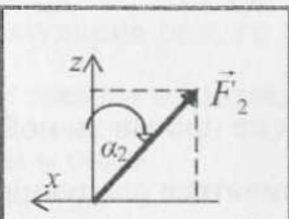
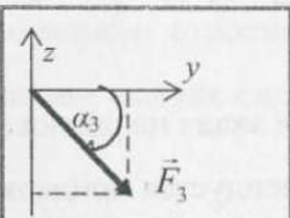
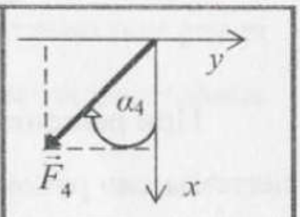
Задача С4

Однородная прямоугольная плита весом $P = 5\ H$ со сторонами $AB = 3a$ и $BC = 2a$ закреплена в точке A сферическим подшипником, а в точке B цилиндрическим шарниром (подшипником) и удерживается в равновесии невесомым стержнем CC_1 (рис. С4.0 – С4.2).

На плиту действуют пара сил с моментом $M = 6$ Нм, лежащая в плоскости плиты, и две силы. Значения этих сил, их направления и точки приложения указаны в таблице С4. Точки приложения сил (D, E, H) находятся в середине сторон плиты.

Определить реакции связей в точках A, B и C. При подсчетах принять $a = 0{,}5$м.

Таблица С4

Силы								
	$F_1 = 4\ H$		$F_2 = 6\ H$		$F_3 = 8\ H$		$F_4 = 10\ H$	
Номер условия	Точка приложения	α_1, град.	Точка приложения	α_2, град.	Точка приложения	α_3, град.	Точка приложения	α_4, град.
0	D	60	-	-	E	0	-	-
1	H	90	D	30	-	-	-	-
2	-	-	E	60	-	-	D	90
3	-	-	-	-	E	30	H	0
4	E	0	-	-	H	60	-	-
5	-	-	D	60	H	0	-	-
6	-	-	H	30	-	-	D	90
7	E	30	H	90	-	-	-	-
8	-	-	-	-	D	0	E	60
9	-	-	E	90	D	30	-	-

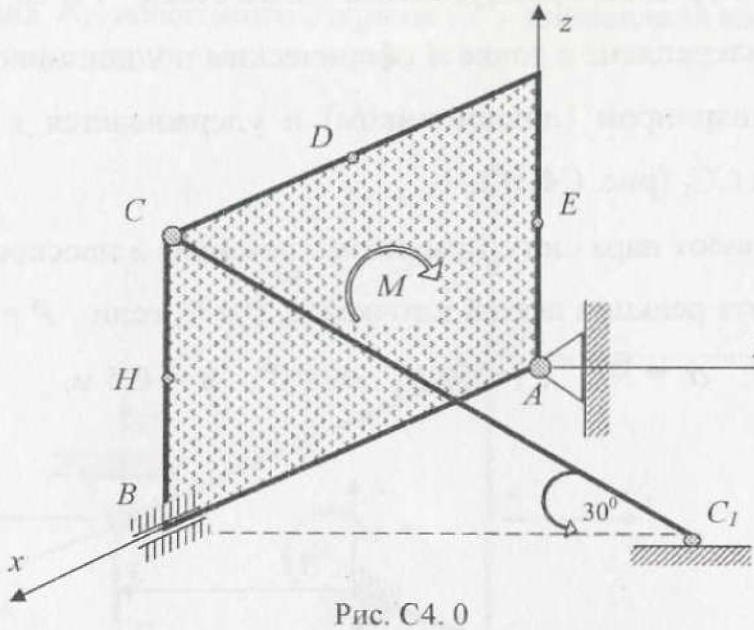


Рис. С4. 0

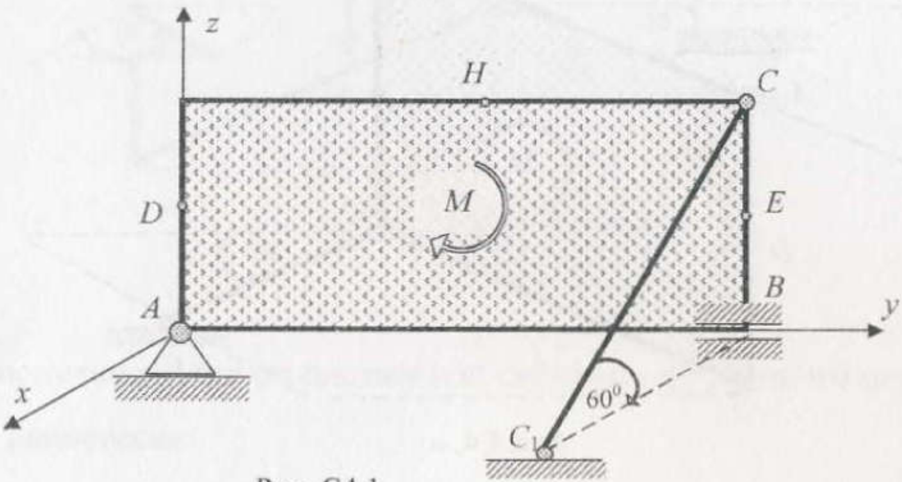


Рис. С4.1

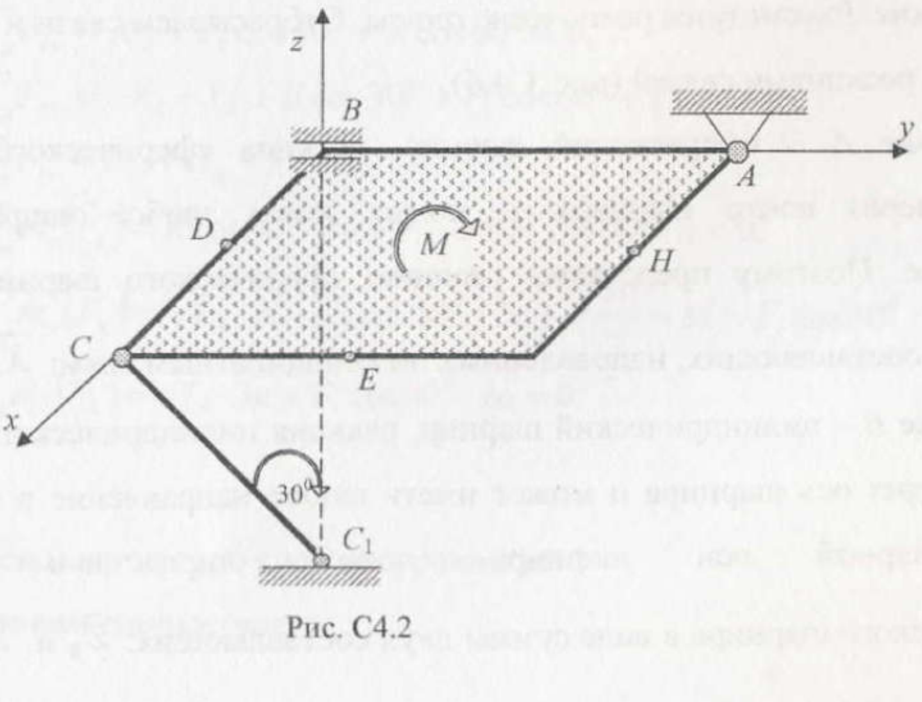


Рис. С4.2

Пример С4. Однородная прямоугольная плита весом P со сторонами $AB = 3a$ и $BC = 2a$ закреплена в точке A сферическим подшипником, а в точке B цилиндрическим шарниром (подшипником) и удерживается в равновесии невесомым стержнем CC_1 (рис. С4, *а*).

На плиту действуют пара сил с моментом, лежащая в плоскости плиты, и две силы. Определить реакции связей в точках A, B и C, если $P = 5\ H$, $M = 6\ Hм$, $F_1 = 10\ H$, $\alpha_1 = 30^0$, $F_3 = 30\ H$, $\alpha_3 = 0^0$, $a = 0{,}5$ м.

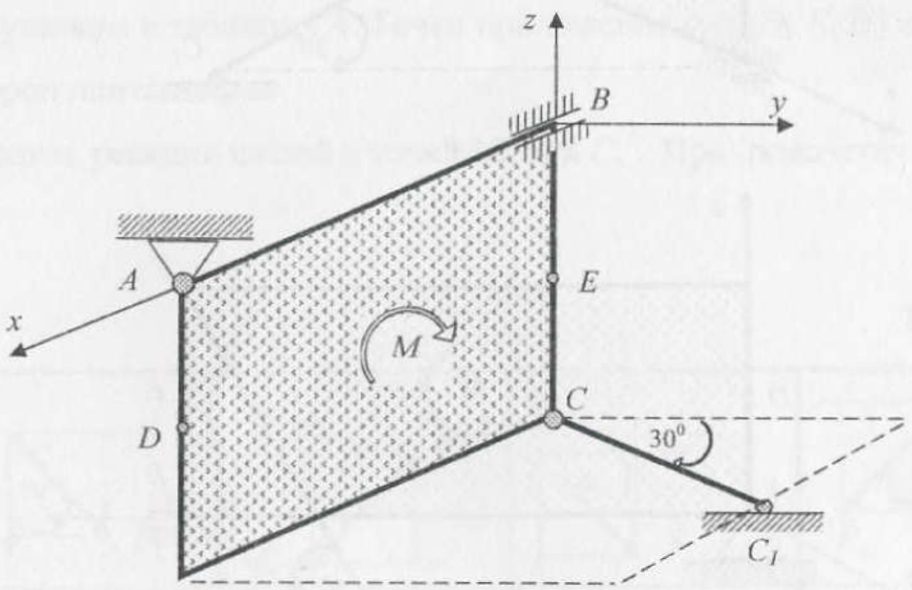


Рис. С4, *а*

Решение. Рассмотрим равновесие плиты. Отбрасываем связи и заменяем их действие реакциями связей (рис. С4,*б*).

В точке A – сферический шарнир, реакция сферического шарнира проходит через центр шарнира и может иметь любое направление в пространстве. Поэтому представим реакцию сферического шарнира в виде суммы трех составляющих, направленных по координатным осям: $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$.

В точке B – цилиндрический шарнир, реакция цилиндрического шарнира проходит через ось шарнира и может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира, поэтому представим реакцию цилиндрического шарнира в виде суммы двух составляющих: $\vec{Z}_B$ и $\vec{Y}_B$.

Реакция $\vec{R}_C$ невесомого стержня CC_1 направлена вдоль стержня.

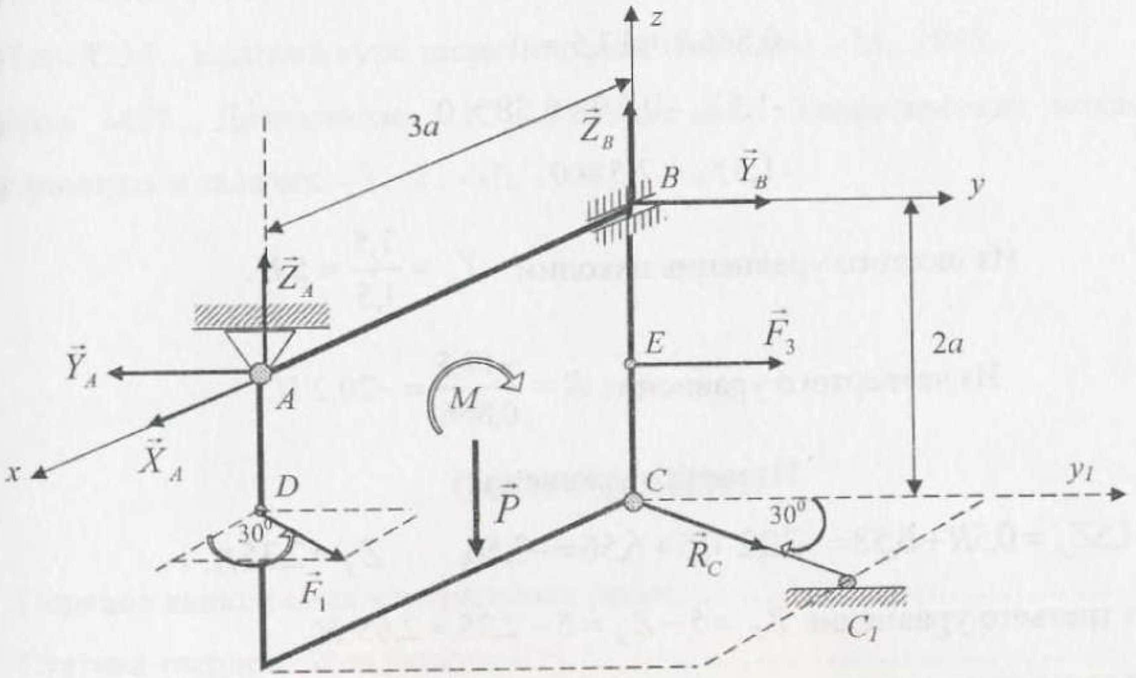


Рис. С4, *б*

Для полученной пространственной системы сил составим шесть уравнений равновесия:

$$\sum F_{kx} = X_A + F_1\cos 30^0 + R\cos 60^0 = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = -Y_A + Y_B + R\cos 30^0 + F_1\cos 60^0 + F_3 = 0, \quad (2)$$

$$\sum F_{kz} = Z_A + Z_B - P = 0, \quad (3)$$

$$\sum m_x\left(\vec{F}_k\right) = R\cos 30^0 \cdot 2a + F_3 \cdot a + F_1\cos 60^0 \cdot a = 0, \quad (4)$$

$$\sum m_y\left(\vec{F}_k\right) = -Z_A \cdot 3a - R\cos 60^0 \cdot 2a + P\frac{3a}{2} - M - F_1\cos 30^0 \cdot a = 0, \quad (5)$$

$$\sum m_z\left(\vec{F}_k\right) = -Y_A \cdot 3a + F_1\cos 60^0 \cdot 3a = 0. \quad (6)$$

Решаем полученную систему уравнений.

Подставим данные задачи.

$$X_A + 0{,}5\,R + 8{,}66 = 0 \qquad (1)$$

$$-Y_A + Y_B + 0{,}866R + 35 = 0 \qquad (2)$$

$$Z_A + Z_B - 5 = 0 \qquad (3)$$

$$0{,}866R + 17{,}5 = 0 \qquad (4)$$

$$-1{,}5Z_A - 0{,}5R - 6{,}58 = 0 \qquad (5)$$

$$-1{,}5Y_A + 7{,}5 = 0 \qquad (6)$$

Из шестого уравнения находим: $Y_A = \dfrac{7{,}5}{1{,}5} = 5\,H.$

Из четвертого уравнения $R = \dfrac{-17{,}5}{0{,}866} = -20{,}2\,H.$

Из пятого уравнения

$$-1{,}5Z_A = 0{,}5R + 6{,}58 = -20{,}2 \cdot 0{,}5 + 6{,}56 = -3{,}54 \qquad Z_A = 2{,}35H.$$

Из третьего уравнения $Z_B = 5 - Z_A = 5 - 2{,}35 = 2{,}65\ H.$

Из второго уравнения

$$Y_B = Y_A - 0{,}866R - 35 = 5 + 0{,}866 \cdot 20{,}2 - 35 = -12{,}5\ H.$$

Из первого уравнения

$$X_A = -0{,}5R - 8{,}66 = 0{,}5 \cdot 20{,}2 - 8{,}66 = 1{,}44\,H.$$

Проверка.

Составим уравнение моментов относительно оси y_1 параллельной y.

$$\sum m_{y_1}\left(\vec{F}_k\right) = -Z_A \cdot 3a + X_A \cdot 2a - M + P \cdot 1{,}5a + F_1 \cos 30^0\, a = 0;$$

$$-2{,}35 \cdot 3 \cdot 0{,}5 + 1{,}44 \cdot 2 \cdot 0{,}5 - 6 + 5 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}5 + 10 \cdot 0{,}866 \cdot 0{,}5 = 0;$$

$$-3{,}52 + 1{,}44 - 6 + 3{,}75 + 4{,}33 = 0;$$

$$-9{,}52 + 9{,}52 = 0.$$

Следовательно, реакции определены верно.

Ответ: $X_A = 1{,}44\ H$, $\quad Y_A = 5\ H$, $\quad Z_A = 2{,}35\ H$,

$Y_B = -12{,}5\ H$, $\quad Z_B = 2{,}65\ H$, $\quad R = -20{,}2\ H$.

Знак «минус» указывает, что реакции $\vec{Y}_B$ и $\vec{R}$ направлены противоположно показанным на рис. С4, *б*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. - Т. 1. -СПб, 1998.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. - М., 1995.
3. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. - Т. 2 . -М., 1991.

СОДЕРЖАНИЕ

Подписано в печать 22.02.18. Формат 84x108/32
Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
Бумага мелованная. Усл. Печ. л. – 2,05.
Тираж 50 экз.

Издательство Современного технического университета
390048, г. Рязань, ул. Новоселов, 35А.
(4912) 30-06-30, 30 08 30