СОВРЕМЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации
для выполнения контрольных работ

Рязань
2018

УДК 519.6
ББК 22.1
В94

Вычислительная математика. Методические рекомендации для выполнения контрольных работ. / сост. Никитина С.Ю., Фролова Г.В. Совр. техн. универ-т.–Рязань, 2018.–29 с. – 50 экз.

Рецензент: кандидат физико-математических наук, Ширяев А. Г.

В методических рекомендациях для выполнения контрольных работ приведены задания по следующим темам: «Решение нелинейного уравнения», «Интерполяция», «Численное дифференцирование и интегрирование». Даны указания по выполнению и оформлению контрольных работ, список литературы.

Пособие предназначено студентам технических вузов.

Печатается по решению Ученого Совета

Современного технического университета.

УДК 519.6
ББК 22.1
В94

СОДЕРЖАНИЕ:

Указания по оформлению и выполнению контрольной работы

Контрольная работа оформляется в отдельной тетради в соответствии с принятыми правилами.

1. Обложку необходимо оформить следующим образом:

Контрольная работа по Вычислительной математике студента группы № 1234 Иванова Ивана Ивановича ВАРИАНТ № 5 преподаватель: Петров Петр Петрович

2. Задания необходимо выполнять в том порядке, в котором они приведены в разработке.

3. Перед решением задачи необходимо полностью привести ее условие.

4. Решение должно сопровождаться всеми необходимыми формулами, развернутыми расчетами, краткими пояснениями и необходимыми выводами.

5. Страницы работы должны быть пронумерованы и иметь поля для замечаний преподавателя.

6. Номер контрольной работы выбирается студентом по таблице в соответствии с первой буквой фамилии и последней цифрой номера его зачетной книжки.

ТАБЛИЦА
выбора вариантов заданий контрольной работы

Первая буква фамилии	Последняя цифра зачетной книжки	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Задача 7
		№ варианта						
А В Д Ж И Л Н П С У Х Ч Щ Ю	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	2	2	2	2	2	2	2
	3	3	3	3	3	3	3	3
	4	4	4	4	4	4	4	4
	5	5	5	5	5	5	5	5
	6	6	6	6	6	6	6	6
	7	7	7	7	7	7	7	7
	8	8	8	8	8	8	8	8
	9	9	9	9	9	9	9	9
	0	10	10	10	10	10	10	10
Б Г Е З К М О Р Т Ф Ц Ш Э Я	1	2	2	2	5	5	7	8
	2	3	3	3	6	6	8	9
	3	4	4	4	7	7	9	10
	4	5	5	5	8	8	10	1
	5	6	6	6	9	9	1	2
	6	7	7	7	10	10	2	3
	7	8	8	8	1	1	3	4
	8	9	9	9	2	2	4	5
	9	10	10	10	3	3	5	6
	0	1	1	1	4	4	6	7

Задача № 1. Решение нелинейного уравнения. Метод дихотомии.

Найти корни уравнения $F(x) = 0$ методом половинного деления с точностью $\varepsilon = 0.01$.

Указание по выполнению: Прежде, чем начать выполнение работы необходимо определить отрезок, на котором находится корень данного уравнения. Это можно сделать графически или построить таблицу значений функции на некотором, достаточно обширном, диапазоне значений аргумента.

Описанные действия можно выполнить с применением компьютера и электронной таблицы Ms Excel или на листе бумаги с помощью калькулятора. Выполнить проверку знаков данной функции на концах найденного отрезка (функция, соответствующая данному уравнению, должна иметь разные знаки в точках, определяющих концы отрезка).

Получить в качестве результата значение корня уравнения с наперед заданной погрешностью. Номер итерации после которого можно завершить вычисления определяется по формуле $b_n - a_n < \varepsilon$.

Пример. Методом половинного деления найти корень уравнения $4 - e^x - 2x^2 = 0$ с точностью $\varepsilon = 0.01$.

Решение. Выясним, сколько корней имеет уравнение $4 - e^x - 2x^2 = 0$, и найдем промежутки, в которых эти корни находятся.

Рассмотрим три функции: $f(x) = 4 - e^x - 2x^2$, $\varphi(x) = 4 - 2x^2$, $\psi(x) = e^x$.

Уравнение $4 - e^x - 2x^2 = 0$ эквивалентно уравнению $4 - 2x^2 = e^x$. Отделим его корни табличным способом. Из таблицы значений функции $f(x)$ на промежутке $[-3; 1]$ с шагом изменения *x*, равным 1, видно, что существуют корни уравнения на отрезках $[-2; -1]$ и $[0; 1]$, так как значения функции имеют на концах этих отрезков разные знаки.

x	-3	-2	-1	0	1
f(x)	-14,05	-4,14	1,63	3,00	-0,72
φ(x)	-14,00	-4,00	2,00	4,00	2,00
ψ(x)	0,05	0,14	0,37	1,00	2,72

Заметим, что аналогичный результат получится, если использовать другой способ отделения корней - графический, построив графики указанных функций (необходимые данные содержатся в таблице). Один из искомых корней принадлежит отрезку $[0; 1]$. На каждом шаге вычислений значение корня принимаем равным $x_n = \frac{b_n - a_n}{2}$ с погрешностью $\varepsilon_n = b_n - a_n$. Будем производить вычисления и выбирать последовательность вложенных отрезков $[a_n; b_n]$, используя условие $f(a_i)f(b_i) < 0, \quad i = 1, 2, \ldots$. Имеем

1). $[a;b]=[0;1]$, $x_1=\dfrac{a+b}{2}=0{,}5.$

Так как $f(a)=3,\ f(x_1)=1{,}8513,\ f(b)=-0{,}72$ и $f(x_1)f(b)<0$, то принимаем: $a_1=x_1=0{,}5,\ b_1=b=1;\ \varepsilon_1=b_1-a_1=0{,}5.$

2). $[a_1;b_1]=[0{,}5;1]$, $x_2=\dfrac{a_1+b_1}{2}=0{,}75.$

Здесь $f(a_1)=1{,}8513,\ f(x_2)=0{,}758,\ f(b_1)=0{,}72,\ f(x_2)f(b_1)<0.$

Следовательно, $a_2=x_2=0{,}75,\ b_2=b_1=1;\quad \varepsilon_2=b_2-a_2=0{,}25.$

3). $[a_2;b_2]=[0{,}75;1]$, $x_3=\dfrac{a_2+b_2}{2}=0{,}875;\ \ \varepsilon_3=0{,}125.$

Производя вычисления далее можно убедиться, что требуемая точность достигается на 7-м шаге: $x_7=0{,}8828125$ с погрешностью $\varepsilon_7=0{,}00785<\varepsilon=0{,}01.$ Вычисления удобно оформить в виде таблицы (см. Таблица 1).

<u>Вариант 1.</u>	$x^4+3x-20=0,\ x>0.$
<u>Вариант 2.</u>	$x^3-2x-5=0,\ x>0.$
<u>Вариант 3.</u>	$\dfrac{x}{2+x}-\ln x=0,\ x>0.$
<u>Вариант 4.</u>	$x^4+5x-7=0,\ x>0.$
<u>Вариант 5.</u>	$e^x-x-2=0.$
<u>Вариант 6</u>.	$2-\ln x-x=0,\ x>0.$
<u>Вариант 7.</u>	$2e^x+x-1=0.$
<u>Вариант 8.</u>	$\dfrac{1}{2}e^x-x-1=0.$
<u>Вариант 9.</u>	$\ln x+0.5x-1=0,\ x>0.$
<u>Вариант 10.</u>	$\dfrac{1}{1+x^2}-\ln x=0,\ x>0.$

Таблица 1. Метод половинного деления

***i* – номер итерации**	**Рассмат-риваемый отрезок [a,b]**	**Середина отрезка x_i**	**$f(a)$**	**$f(x_i)$**	**$f(b)$**	**Проверка условия**	**Погрешность**
1.	[0,1]	$x_1=0.5$	$f(0)=3$	$f(0.5)=1.8513$	$f(1)=-0.72$	$f(0.5)*f(1)<0$	$\varepsilon_1=1-0.5$ <0.01
2.	[0.5, 1]	$x_2=0.75$	$f(0.5)=1.8513$	$f(0.75)=0.758$	$f(1)=-0.72$	$f(0.75)*f(1)<0$	$\varepsilon_2=1-0.75$ <0.01
3.	[0.75, 1]	$x_3=0.875$	$f(0.75)=0.758$	$f(0.875)=0.0698$	$f(1)=-0.72$	$f(0.875)*f(1)<0$	$\varepsilon_3=1-0.875$ <0.01
4.	и т.д.						

Задача № 2. Решение нелинейных уравнений. Метод простых итераций

Найти корни уравнения $f(x) = 0$ методом простых итераций с точностью $\varepsilon = 0.01$. (Использовать варианты заданий **задачи № 1**.)

Указание по выполнению: Основной проблемой применения метода является обеспечение сходимости итерационного процесса. Рекомендуется следующий способ получения формулы сходящегося итерационного процесса.

Пусть $f'(x) > 0 \quad \forall x \in [a,b]$. Если это не так, переписать уравнение в виде $-f(x) = 0$. Умножить обе части уравнения на $-\lambda(\lambda > 0)$ и к обеим частям прибавить x:

$$x = x - \lambda f(x) = \varphi(x)$$

Константу λ вычислить по формуле:

$$\lambda = \frac{1}{\max\limits_{x \in [a,b]} \left| f'(x) \right|}.$$

Такое значение λ гарантирует сходящийся итерационный процесс по формуле $\boxed{x_i = x_{i+1} - \lambda f(x)}$, где i=1, 2,… - номер итерации, $x_0 \in [a,b]$ – начальное приближение.

Указанная точность вычислений считается достигнутой, если разность (взятая по модулю) между корнями уравнения, полученными в двух соседних итерациях: $| x_{i+1} - x_i)| < \varepsilon$.

Пример. Решить уравнение $2x - \cos x = 0$ с точностью $\varepsilon = 0{,}01$.

Решение. Для отделения корней представим данное уравнение в виде $x = \frac{1}{2}\cos x$. Построив графики функций $y = x$ и $y = \frac{1}{2}\cos x$, увидим, что корень уравнения содержится внутри отрезка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Здесь

$$f(x) = 2x - \cos x;\ f'(x) = 2 + \sin x > 0;\ M = \max_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]}(2 + \sin x) = 3;\ \lambda = -\frac{1}{M} = -\frac{1}{3};$$

$$g(x) = x + \lambda f(x) = x - \frac{1}{3}(2x - \cos x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\cos x.$$

Положим $x_0 = 0{,}5$. Последовательные приближения найдём по формулам

$$x_{k+1}=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\cos x_k, \quad k=1,2,3,...$$

$x_1 = 0{,}4389128$;

$x_2 = 0{,}45263292$; $\varepsilon = |x_2 - x_1| = 0{,}01372012;$

$x_3 = 0{,}44964938$; $\varepsilon = |x_3 - x_2| = 0{,}00298354;$

$x_4 = 0{,}450299978$ $\varepsilon = |x_4 - x_3| = 0{,}000650598.$

Четвертое приближение можно было не вычислять, так как требуемую погрешность мы получили уже на третьем шаге. Заметим, что мы получили приближённое значение корня с точностью более высокой, чем задано в условии.

<u>Задача № 3. Решение нелинейных уравнений. Метод касательных.</u>

Найти корни уравнения $f(x)=0$ методом касательных (Ньютона) с точностью $\varepsilon = 0.01$. (Для выполнения задачи использовать варианты заданий **<u>задачи № 1.</u>**)

<u>Указание по выполнению</u>: Начальное приближение x_0 определяется из отрезка определённого в задаче № 1. Аналитически или численным методом вычисляется производная функции $f'(x)$ и используется для вычисления очередного значения корня уравнения $f(x)=0$.

Итерационная формула метода Ньютона (касательных): $\boxed{x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$. Указанная точность вычислений считается достигнутой, если разность (взятая по модулю) между корнями уравнения, полученными в двух соседних итерациях $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$.

<u>Пример.</u> Один из корней уравнения $x^3 - 6x + 2 = 0$ заключён в отрезке $[0;1]$. Найти приближённое значение этого корня методом касательных с точностью $\varepsilon = 0.01$.

Решение. Здесь $f(x) = x^3 - 6x + 2$; $f'(x) = 3x^2 - 6$; $f''(x) = 6x$. Заметим, что на отрезке $[0;1]$ сохраняют знак и первая и вторая производные:

$f'(x) < 0; f''(x) > 0$. Таким образом, выполняются условия применения метода касательных. В качестве x_0 можно взять, например, $x_0 = 0$, так как

$f(0) = 2 > 0$ и $f''(0) = 0 \geq 0$. Тогда имеем $x_1 = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = \frac{1}{3} = 0{,}3333$. Оценим погрешность вычисления $\varepsilon = |x_1 - x_0| = 0.3 > 0.01$.

Вторая итерация: $x_2 = \frac{1}{3} - \frac{f(\frac{1}{3})}{f'(\frac{1}{3})} = \frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{27}}{-\frac{16}{3}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{144} = \frac{147}{432} = \frac{29}{144}$.

Оценим погрешность вычисления: $\varepsilon = |x_2 - x_1| = \frac{1}{144} \approx 0{,}007 < 0.01$.

<u>Задача № 4. Линейная интерполяция</u>

Построить кусочно-линейный интерполянт по заданной таблице узлов интерполяции.
<u>Указание по выполнению</u>: Для построения аналитического выражения линейного интерполянта использовать формулу: $\boxed{P(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)}$, где $(x_i; y_i)$, $(x_{i+1}; y_{i+1})$ – узлы интерполяции. Вычислить с помощью построенного интерполянта значения функции в точках, расположенных между узлами интерполяции. Определить погрешность вычисления значений функции в точках x_{01}, x_{02}. Для вычислений использовать формулы: $\boxed{\varepsilon_i = |F(x_{0i}) - P(x_{0i})|}$, где i=1, 2.

<u>Пример.</u> Построить кусочно-линейный интерполянт по заданной таблице узлов интерполяции. Вычислить с помощью построенного интерполянта значения функции в точках, расположенных между узлами интерполяции. Определить погрешность вычисления значений функции в точках $x_{01} = 0{,}5$, $x_{02} = -0{,}7$.
$F(x) = x^2$.

x_i	-1,5	-0,5	0,2	0,9	1,6
$F(x_i)$	2,25	0,25	0,04	0,81	2,56

Решение. Первая точка $x_{01} = 0{,}5$ расположена между узлами $(0.2;0.04)$ и $(0.9;0.81)$, рисунок 4.1. Подставим эти значения в формулу

$P(x) = 0{,}04 + \frac{0{,}81 - 0{,}04}{0{,}9 - 0{,}2}(x - 0{,}2) = 1{,}1 \cdot x - 0{,}18$;

$P(0{,}5) = 1{,}1 \cdot 0{,}5 - 0{,}18 = 0{,}37$;

$F(0{,}5) = 0{,}25$.

Определим погрешность вычисления $\varepsilon_1 = |F(0,5) - P(0,5)| = |0,25 - 0,37| = 0,12$.

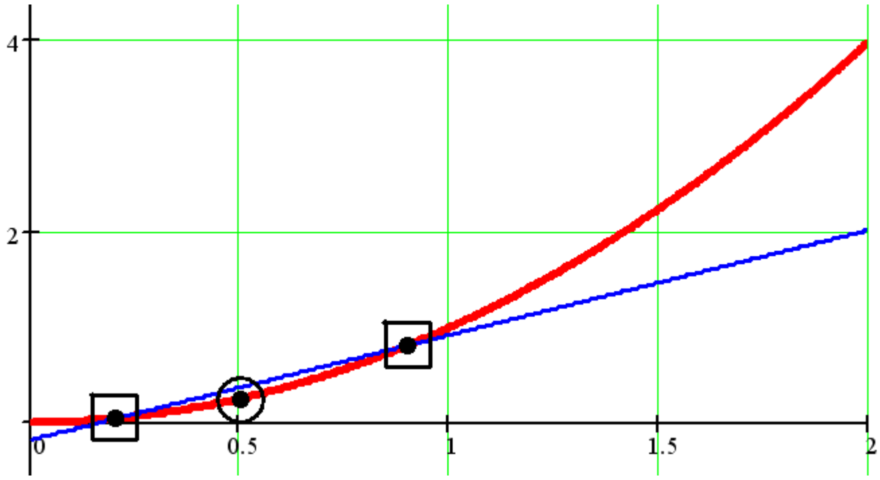

Рис. 4.1. Квадраты – узлы интерполяции, тонкая линия - $P(x)$*,*
толстая линия - $F(x)$*, круг -* $x_{01} = 0,5$.

Вторая точка $x_{02} = -0,7$ расположена между узлами $(-1,5;2,25)$ и $(-0,5;0,25)$ - рисунок 4.2. Подставим эти значения в формулу

$$P(x) = 2,25 + \frac{0,25 - 2,25}{-0,5 + 1,5}(x + 1,5) = -2 \cdot x - 0,75;$$

$$P(-0,7) = -2 \cdot (-0,7) - 0,75 = 0,65;$$

$$F(-0,7) = 0,49$$

Определим погрешность вычисления $\varepsilon_2 = |F(-0,7) - P(-0,7)| = |0,49 - 0,65| = 0,16$.

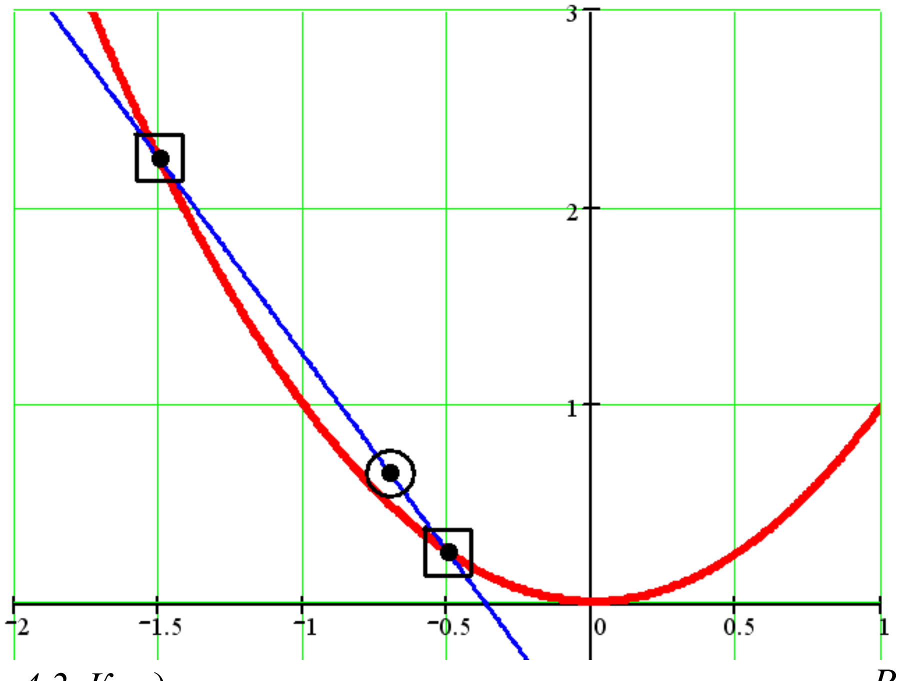

Рис. 4.2. Квадраты – узлы интерполяции, тонкая линия - $P(x)$*,*
толстая линия - $F(x)$*, круг -* $x_{02} = -0,7$.

Вариант 1. $F(x) = \ln x^2$.

x_i	-11,2	-0,5	18,3	43,7	69,2	110,8
$F(x_i)$	4,83	-1,39	5,81	7,55	8,47	9,41

По построенному интерполянту вычислить значения функции $F(x)$ в точках $x_{01} = 23{,}4$ и $x_{02} = 50{,}2$.

Вариант 2. $F(x) = 5 \cdot e^{18 \cdot x}$.

x_i	x_i	-0,2	0,03	0,1	0,22	0,32
$F(x_i)$	$F(x_i)$	0,14	8,58	30,25	262,29	1586,74

По построенному интерполянту вычислить значения функции $F(x_i)$ в точках $x_{01} = 0{,}05$ и $x_{02} = 0{,}15$.

Вариант 3. $F(x) = x^3 + 7 \cdot x^2 + 5 \cdot x$.

x_i	x_i	-5,2	-2,5	0,8	2,4	4,1
$F(x_i)$	$F(x_i)$	22,67	15,63	8,99	66,14	207,09

По построенному интерполянту вычислить значения функции $F(x_i)$ в точках $x_{01} = 0{,}2$ и $x_{02} = 1{,}8$.

Вариант 4. $F(x) = e^{x^2 - 5x}$.

x_i	x_i	-0,95	-0,5	-0,2	0,6	1,02
$F(x_i)$	$F(x_i)$	285	15,64	2,83	0,07	0,02

По построенному интерполянту вычислить значения функции $F(x_i)$ в точках $x_{01} = -0{,}41$ и $x_{02} = 0{,}32$.

Вариант 5. $F(x) = e^x$.

x_i	x_i	1,01	1,04	1,11	1,16	1,20
$F(x_i)$	$F(x_i)$	2,75	2,83	3,03	3,19	3,32

По построенному интерполянту вычислить значения функции $F(x_i)$ в точках $x_{01} = 1{,}031$ и $x_{02} = 1{,}152$.

Вариант 6. $F(x) = \cos x$.

x_i	xi	1,01	1,04	1,07	1,13	1,18
$F(x_i)$	F(xi)	0,53	0,51	0,48	0,43	0,38

По построенному интерполянту вычислить значения функции $F(x_i)$ в точках $x_{01} = 1{,}022$ и $x_{02} = 1{,}145$.

Вариант 7. $F(x) = 3 \cdot \sin x$.

x_i	xi	1,01	1,03	1,08	1,14	1,19
$F(x_i)$	F(xi)	2,54	2,57	2,65	2,73	2,79

По построенному интерполянту вычислить значения функции $F(x_i)$ в точках $x_{01} = 1{,}053$ и $x_{02} = 1{,}172$.

Вариант 8. $F(x) = \ln x$.

x_i	xi	1,01	1,06	1,10	1,14	1,19
$F(x_i)$	F(xi)	0,01	0,06	0,09	0,13	0,17

По построенному интерполянту вычислить значения функции $F(x_i)$ в точках $x_{01} = 1{,}032$ и $x_{02} = 1{,}171$.

Вариант 9. $F(x) = e^{-x}$.

x_i	xi	1,01	1,05	1,10	1,14	1,20
$F(x_i)$	F(xi)	0,36	0,35	0,33	0,32	0,30

По построенному интерполянту вычислить значения функции $F(x_i)$ в точках $x_{01} = 1{,}028$ и $x_{02} = 1{,}172$.

Вариант 10. $F(x)=\sin x$.

x_i	1,00	1,04	1,08	1,10	1,17
$F(x_i)$	0,84	0,86	0,88	0,89	0,92

По построенному интерполянту вычислить значения функции $F(x_i)$ в точках $x_{01}=1{,}058$ и $x_{02}=1{,}124$.

Задача № 5. Интерполяционный полином Лагранжа.

По заданной таблице узлов интерполяции построить полином Лагранжа. *Указание по выполнению*: Пусть заданы узлы интерполяции $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$, $(x_3;y_3)$. Для этих узлов полином Лагранжа имеет вид:

$$\boxed{L_2(x)=y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+y_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+y_3\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}}$$

Вычислить с помощью построенного полинома значения функции в точках x_{01} и x_{02}, расположенных между узлами интерполяции. В указанных точках x_{01} и x_{02} рассчитать погрешность вычисления значений функции $F(x)$ с помощью аналитического выражения функции и полинома Лагранжа по формуле:

$$\varepsilon_i=\left|F(x_{0i})-L_n(x_{0i})\right|$$

где i=1,2…, а $L_n(x_{0i})$ - значение полинома Лагранжа.
Использовать интерполяционную таблицу **задачи № 4.**

Пример. По заданной таблице узлов интерполяции построить полином Лагранжа. Вычислить с помощью построенного полинома значения функции в точках, расположенных между узлами интерполяции. В указанных точках x_{01} и x_{02}. Рассчитать погрешность вычисления значений функции в точках.
$F(x)=2\cdot x^3$.

x_i	-1,5	-0,5	0,2	0,9	1,6
$F(x_i)$	-6,75	-0,25	0,02	1,46	8,19

$x_{01}=0{,}5$, $x_{02}=-0{,}7$.

Решение. Первая точка $x_{01}=0{,}5$ соответствует узлам $(0{,}2;0{,}02)$, $(0{,}9;1{,}46)$ и $(1{,}6;8{,}19)$. Подставим эти значения в формулу
По формуле имеем:

$$L(x)=\frac{(x-0{,}9)(x-1{,}6)}{(0{,}2-0{,}9)(0{,}2-1{,}6)}\cdot 0{,}02+\frac{(x-0{,}2)(x-1{,}6)}{(0{,}9-0{,}2)(0{,}9-1{,}6)}\cdot 1{,}46+\frac{(x-0{,}2)(x-0{,}9)}{(1{,}6-0{,}2)(1{,}6-0{,}9)}\cdot 8{,}19$$

$L(x)=5.4x^2-3.88x+0.58$ (коэффициенты округлены до сотых).

$L(0.5)=-0.01$.

$F(0.5)=0.25$. На рисунке 4.3. изображены графики функции и интерполянта. Вычислим погрешность $\varepsilon_1=|F(0.5)-L(0.5)|=|-0.01-0.25|=0.26$.

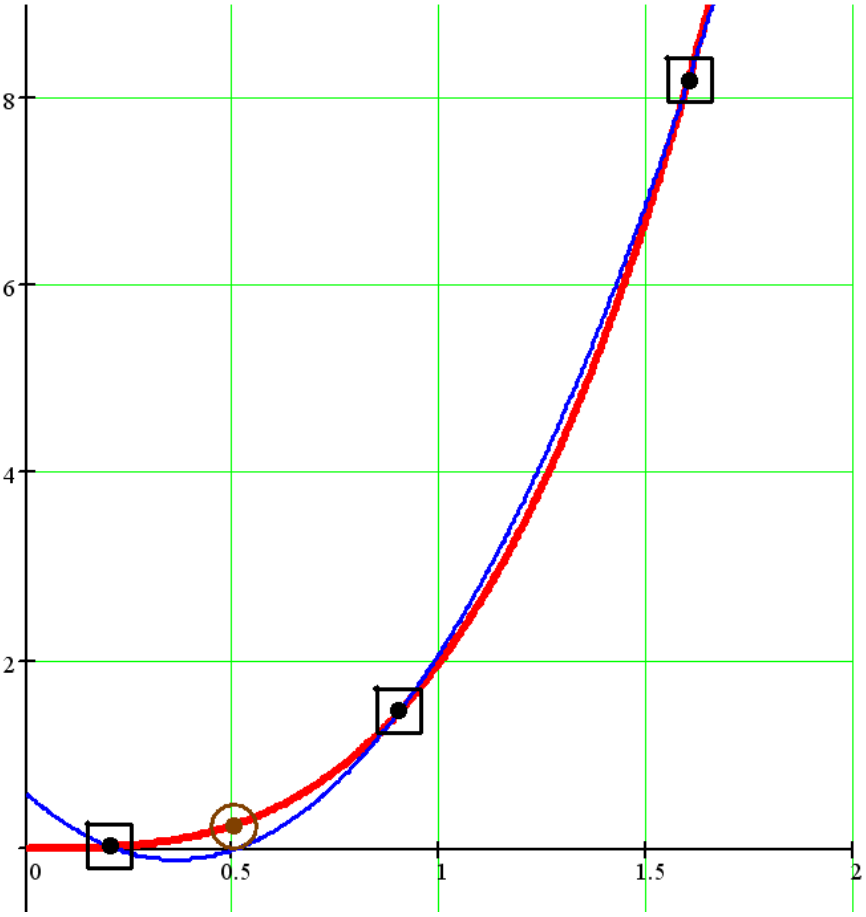

Рис. 4.3. Квадраты – узлы интерполяции, тонкая линия - $P(x)$*, толстая линия -* $F(x)$*, круг -* $x_{01}=0{,}5$.

Вторая точка $x_{02}=-0{,}7$ соответствует узлам $(-1.5;-6.75)$, $(-0.5;-0.25)$ и $(0.2;0.02)$. Подставим эти значения в формулу

По формуле имеем:

$$L(x)=\frac{(x+0.5)(x-0.2)}{(-1.5+0.5)(-1.5-0.2)}\cdot(-6.75)+\frac{(x-1.5)(x-0.2)}{(-0.5-1.5)(-0.5-0.2)}\cdot(-0.25)+\frac{(x+1.5)(x+0.5)}{(0.2+1.5)(0.2+1.5)}\cdot 0.02$$

$L(x)=-3.6x^2-0.69x+0.3$ (коэффициенты округлены до сотых).

$L(-0.7)=-0975$.

$F(-0.7)=-0.686$. На рисунке 4.4. изображены графики функции и интерполянта.

Вычислим погрешность $\varepsilon_2 = |F(-0.7) - L(-0.7)| = |-0.686 + 0.975| = 0.289$.

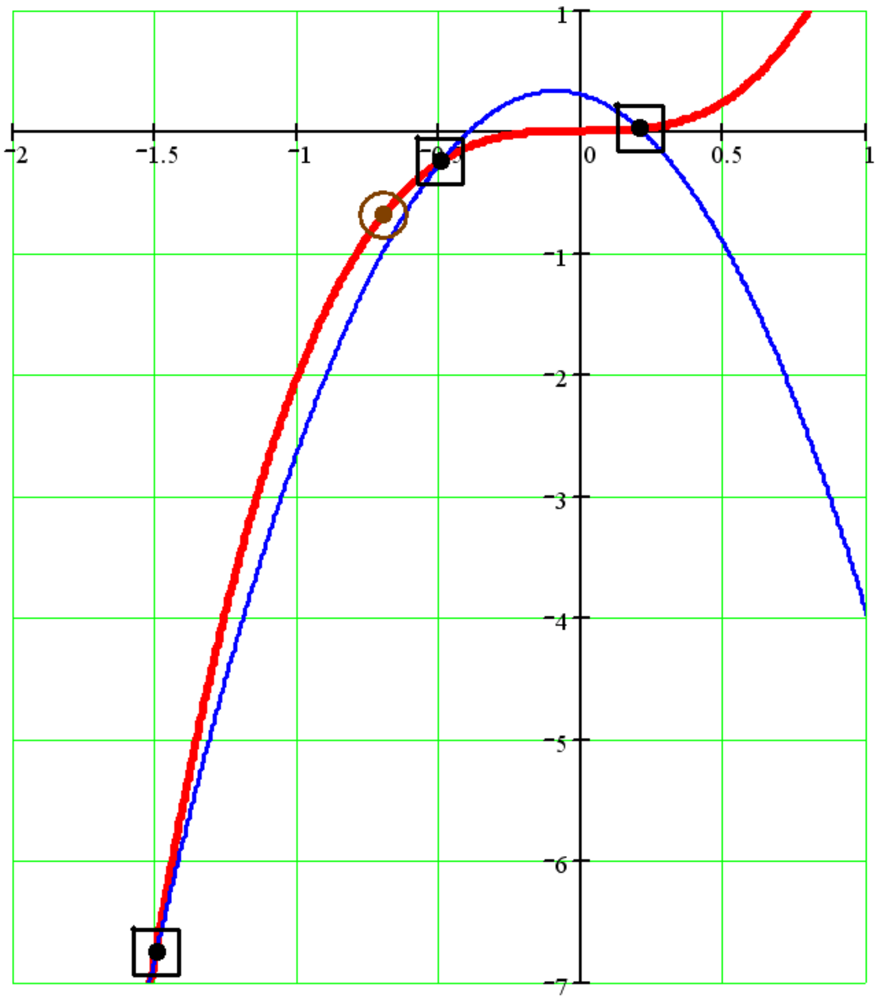

Рис. 4.4. Квадраты – узлы интерполяции, тонкая линия - $P(x)$, толстая линия - $F(x)$, круг - $x_{02} = -0{,}7$.

<u>Задача № 6. Численное дифференцирование</u>

Для функции $F(x)$ найти значение производной в точке x_0 с шагом h.

<u>*Указание по выполнению*</u>: Необходимо воспользоваться формулой:

$$\boxed{F'(x_0) \approx \frac{(\Delta y)_i}{(\Delta x)_i} = \frac{F(x_0 + ha^{-i}) - F(x_0)}{ha^{-i}}}.$$

Найти погрешность решения, используя формулу: $\left| \frac{(\Delta y)_i}{(\Delta x)_i} - \frac{(\Delta y)_{i-1}}{(\Delta x)_{i-1}} \right| < \varepsilon$.

Погрешность найденного решения не должна превышать $\varepsilon = 0.01$.

Для вариантов 1-5 найти значение производной в точке $x_0 = 1.6$, $h = 0.1$, $a = 10$;

Для вариантов 6-10 – в точке $x_0 = 1.8$, $h = 0.05$, $a = 20$.

Пример. Вычислить производную функции $y = \sin x$ в точке $x_0 = \pi / 3$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$. $(\pi / 3 \approx 1{,}047198)$

Решение.

Положим $h = 0.1$, $a = 10$ $(\Delta x)_i = 0{,}1 \cdot 10^{-i}$, откуда: $(\Delta y)_i = \sin\left(\frac{\pi}{3} + 0{,}1 \cdot 10^{-i}\right) - \sin\frac{\pi}{3}$.

Определим приближённое значение производной:

$$y'\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx \frac{(\Delta y)_i}{(\Delta x)_i} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + 0{,}1 \cdot 10^{-i}\right) - \sin\frac{\pi}{3}}{0{,}1 \cdot 10^{-i}}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Найдём отношения, приближающие производную:

$$\frac{(\Delta y)_0}{(\Delta x)_0} = 0{,}45590189, \quad \frac{(\Delta y)_1}{(\Delta x)_1} = 0{,}49566158, \quad \frac{(\Delta y)_2}{(\Delta x)_2} = 0{,}49956690, \quad \frac{(\Delta y)_3}{(\Delta x)_3} = 0{,}49995670.$$

Заметим, что $\left|\frac{(\Delta y)_3}{(\Delta x)_3} - \frac{(\Delta y)_2}{(\Delta x)_2}\right| = 0{,}0003897939\ 0 < \varepsilon$. Таким образом, начиная с третьего приближения, в соответствии с оценкой погрешности (см. выше), получаем искомое приближение производной данной функции с точностью не меньшей заданной. Точное значение $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = 0{,}5$.

Вариант 1.	$F(x) = 2\sin x$
Вариант 2.	$F(x) = -\cos x$
Вариант 3.	$F(x) = \operatorname{tg} x$
Вариант 4.	$F(x) = 2 \cdot \cos x$
Вариант 5.	$F(x) = 2 \cdot \operatorname{ctg} x$
Вариант 6.	$F(x) = \sin x$
Вариант 7.	$F(x) = -\cos x$
Вариант 8.	$F(x) = 2\operatorname{tg} x$
Вариант 9.	$F(x) = \ln x$
Вариант 10.	$F(x) = 3 \cdot \operatorname{ctg} x$

Задача № 7. Численное интегрирование

Вычислить заданные интегралы по формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона, если отрезок интегрирования разбит на n равных частей. Сравнить приближенные значения интеграла с точными.

Указание по выполнению: для выполнения задания использовать следующие итерационные формулы:

Формулы прямоугольников.

Разобьем отрезок интегрирования $[a,b]$ на n равных частей длиной $h=(b-a)/n$. Заметим, что величину h называют шагом интегрирования.

В точках разбиения $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, ..., $x_n = b$ отметим ординаты $y_0, y_1, \ldots, y_n$ кривой $f(x)$, т.е. вычислим $y_i = f(x_i)$, $x_i = a + ih = x_{i-1} + h$ ($i = \overline{0,n}$).

На каждом отрезке длиной h построим прямоугольник со сторонами h и y_i, где $i = \overline{0,n}$, т.е. по значениям ординат, вычисленных в левых концах отрезков. Тогда площадь криволинейной трапеции, приближенно можно представить в виде суммы площадей прямоугольников – рис. 7.1. Отсюда получим ***формулу левых прямоугольников***:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot(y_0+y_1+\ldots+y_{n-1}) = \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = h\cdot\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)} \qquad (1)$$

Если при вычислении интегральной суммы брать значения функции $f(x)$ не в левых, а в правых концах отрезков длиной h, что показано на рисунке 7.1 пунктирной линией, то получим второй вариант формулы – ***формулу правых прямоугольников:***

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot(y_1+y_2+\ldots+y_n) = \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = h\cdot\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}. \qquad (2)$$

Третий вариант формулы прямоугольников можно получить при использовании значений функции $f(x)$, вычисленных в средней точке каждого отрезка длины h (рис. 7.2) – ***формула центральных прямоугольников***:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}+\frac{h}{2})}. \qquad (3)$$

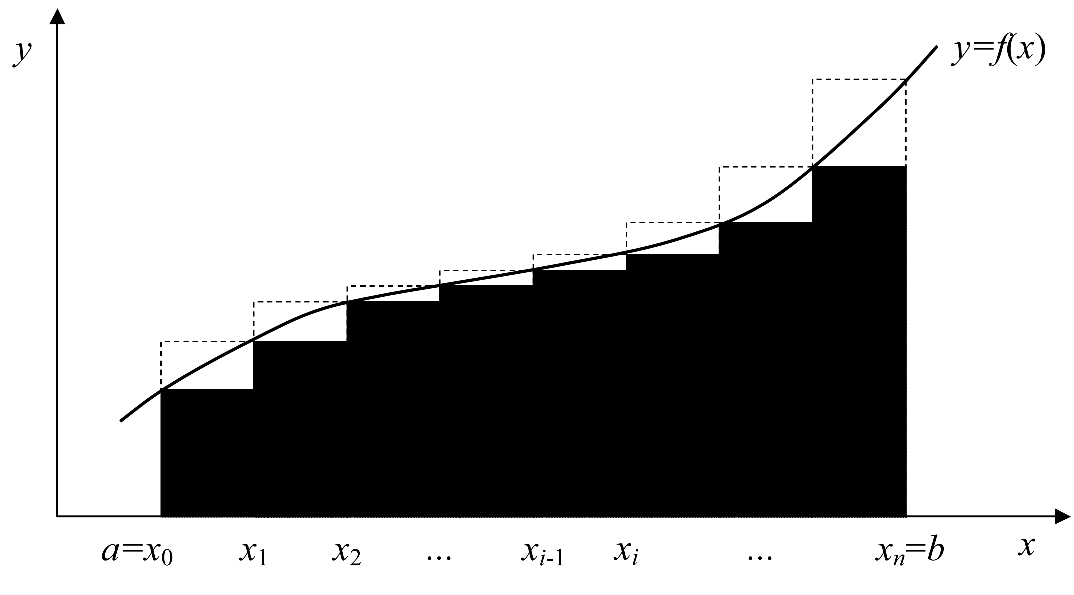

Рис. 7.1. Приближение площади криволинейной трапеции при помощи левых и правых прямоугольников.

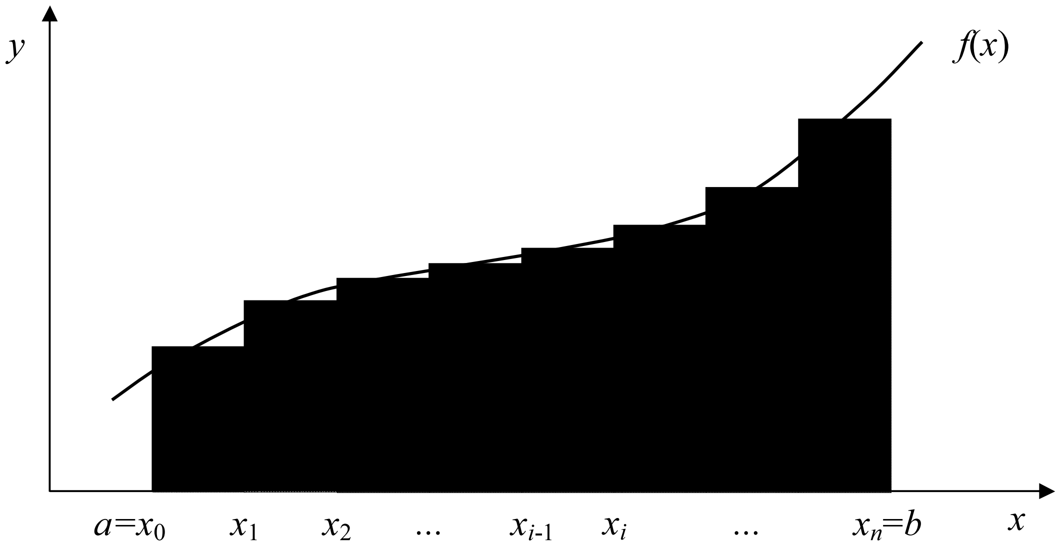

Рис. 7.2. Приближение площади криволинейной трапеции при помощи центральных прямоугольников.

В заданиях приведено точное значение интегралов. Оценим погрешности данного метода по формуле:

$$\boxed{\varepsilon = \left|\int_a^b f(x)dx - I\right|} \qquad (4).$$

<u>Пример 1.</u> Вычислить по одной (на выбор) из формул прямоугольников интеграл $\int_0^1 e^x dx$, разбив отрезок интегрирования на 5 частей. Оценить ошибку вычислений, сравнив полученное значение с точным значением (I=1,718281).

Решение.

Вычислим значения подынтегральной функции $f(x) = e^x$ в точках деления и соответствующие значения занесём в таблицу:

i	0	1	2	3	4	5
x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
y	1,0	1,2214	1,49282	1,82212	2,22554	2,71828

Воспользуемся формулой (1):

$$\int_0^1 e^x dx \approx \frac{1-0}{5}\sum_{i=0}^{4} y_i = 0{,}2(1 + 1.2214 + 1.49282 + 1.82212 + 2.22554) = 1.552376.$$

Оценим ошибку вычисления $\varepsilon = |1.552376 - 1.718281| = 0.165905$.

Воспользуемся формулой (2):

$$\int_0^1 e^x dx \approx \frac{1-0}{5}\sum_{i=1}^{5} y_i = 0{,}2(1.2214+1.49282+1.82212+2.22554+2.71828) = 1.896032.$$

Оценим ошибку вычисления $\varepsilon = \left|1.896032 - 1.718281\right| = 0.177751$.

Воспользуемся формулой (3):

$$\int_0^1 e^x dx \approx \frac{1-0}{5}\sum_{i=1}^{5} y_i = 0{,}2(e^{0.1}+e^{0.3}+e^{0.5}+e^{0.7}+e^{0.9}) = 0{,}2(1.105+1.35+1.649+2.014+2.46) =$$

$$= 1.716$$

Оценим ошибку вычисления $\varepsilon = \left|1.716 - 1.718281\right| = 0.00228$.

Замечание. Во многих случаях формулы (1) и (2) дают приближённые значения определённого интеграла одна – с избытком, а вторая – с недостатком. Поэтому более точное значение можно получить, найдя среднее арифметическое результатов применения обеих формул.

Формула трапеций.

Площадь элементарной криволинейной трапеции с основанием $[x_{i-1}; x_i]$ заменим площадью прямоугольной трапеции, ограниченной сверху отрезком. Тогда искомая площадь криволинейной трапеции, ограниченной линией $y = f(x)$, будет приближённо равна сумме площадей данных прямоугольных трапеций – рисунок 7.3.

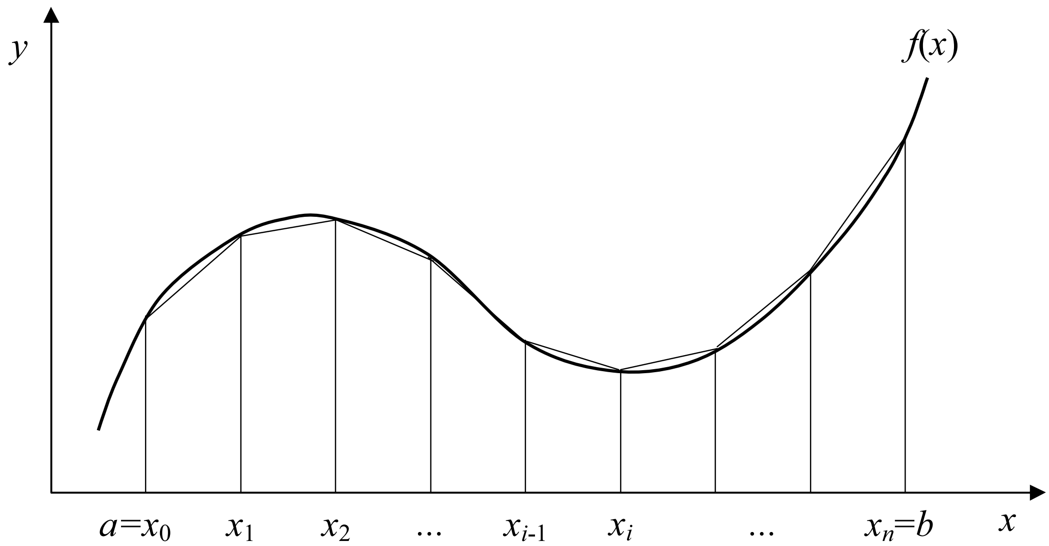

Рис. 7.3. Приближение площади криволинейной трапеции при помощи прямоугольныхтрапеций.

Площадь каждой такой трапеции легко подсчитать, используя хорошо известную из школьного курса геометрии формулу: $S_i = \dfrac{y_{i-1} + y_i}{2} h,\ i = 1, 2, ..., n$.

Сумма таких площадей равна:

$$S_n = \frac{y_0 + y_1}{2}h + \frac{y_1 + y_2}{2}h + \ldots + \frac{y_{i-1} + y_i}{2}h + \ldots + \frac{y_{n-2} + y_{n-1}}{2}h + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}h\,.$$

После очевидных преобразований получим: $S_n = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$. Таким образом, имеем следующую приближённую формулу вычисления определённого интеграла:

$$\boxed{\int_b^a f(x)dx \approx S_n = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)} \qquad (5).$$

Формула (5) носит название ***формулы трапеций***. Ошибку для метода трапеций можно оценить по формуле (4).

Пример 2. В условиях примера 1 использовать формулу трапеций. Оценить ошибку вычисления; сравнить полученное приближённое значение $\int_0^1 e^x dx$ с точным.

Решение:
Воспользуемся таблицей значений, которую мы применяли в предыдущем примере.

i	0	1	2	3	4	5
x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
y	1,0	1,2214	1,49282	1,82212	2,22554	2,71828

По формуле (5) получаем:

$$\int_0^1 e^x dx \approx \frac{1-0}{5} \cdot \left(\frac{1{,}0 + 2{,}71828}{2} + 1.2214 + 1.49282 + 1.82212 + 2.22554 \right) = 0.2 \cdot 8.62102 = 1{,}72420.$$

Оценим ошибку вычисления. $\varepsilon = |1{,}71828 - 1{,}72420| = 0{,}00592$.

Заметим, что данный способ дал нам гораздо более точное приближение, чем используемый в предыдущем примере.

Формула Симпсона.

Для случаев, когда количество отрезков разбиения n чётно, то есть $n = 2m$, $m \in N$, удобно использовать так называемую *формулу Симпсона* (параболических трапеций).

$$\boxed{\int_a f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + y_{2m} + 2\sum_{i=1}^{m-1} y_{2i} + 4\sum_{i=1}^{m} y_{2i-1} \right)} \qquad (6)$$

Напомним, что здесь $m = \frac{n}{2}$.

Пример 3. В условиях примеров 1 и 2 найти приближённое значение $\int\limits_0^1 e^x dx$ методом Симпсона. Оценить ошибку; сравнить полученное значение с точным.

Решение.
Разобьем отрезок на 10 частей.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	1,0	1,10517	1,2214	1,34986	1,49282	1,64872	1,82212	2,01375	2,22554	2,45960	2,71828

$n = 10 \quad m = 5$. Подставим соответствующие значения в формулу (6):

$$\int\limits_0^1 f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + y_{10} + 2\sum_{i=1}^{4} y_{2i} + 4\sum_{i=1}^{5} y_{2i-1} \right) =$$

$$\frac{h}{3}\left(y_0 + y_{10} + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9)\right)$$

$$\int\limits_0^1 e^x dx \approx \frac{1-0}{3\cdot 10}(1{,}0 + 2{,}71828 + 2\cdot(1{,}22140 + 1{,}49182 + 1{,}82212 + 2{,}22554) + 4\cdot(1{,}10517 + 1{,}34986 +$$

$$+ 1{,}64872 + 2{,}01375 + 2{,}45960) = \frac{1}{30}(3{,}71828 + 13{,}52176 + 34{,}30840) = \frac{51{,}54844}{30} = 1{,}71828.$$

При расчёте по данной формуле получили все 5 верных цифр после запятой. Таким образом, в одинаковых начальных условиях метод Симпсона даёт наибольшую точность приближённых вычислений определённого интеграла.

Вариант 1.	$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$	$\left(I = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785 \right)$
Вариант 2.	$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$	$\left(I = \ln 2 \approx 0{,}693 \right)$

<u>Вариант 3.</u>	$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx$$	$(I = 0{,}5)$
<u>Вариант 4.</u>	$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}$$	$\left(I = \ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0{,}881\right)$
<u>Вариант 5.</u>	$$\int_0^e \ln x dx$$	$(I = 1)$
<u>Вариант 6.</u>	$$\int_0^1 \ln(x+1) dx$$	$(I = 2\ln 2 - 1 \approx 0{,}386)$
<u>Вариант 7.</u>	$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$$	$\left(I = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0{,}571\right)$
<u>Вариант 8.</u>	$$\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$$	$\left(I = arctg - \frac{\pi}{4} \approx 0{,}433\right)$
<u>Вариант 9.</u>	$$\int_0^x \cos^3 x dx$$	$(I = 0)$
<u>Вариант 10.</u>	$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$$	$\left(I = \ln(1 + \sqrt{2} \approx 0{,}881\right)$

Список литературы

1	Лебедев В.И.	*ЭБС Книгафонд: Функциональный анализ и вычислительная математика: Уч. пособие*	М: Физматлит, 2014.- 294 с.
2	Воеводин В.В.	*ЭБС Книгафонд: Вычислительная математика и структура алгоритмов: Учебник*	М: МГУ, 2010.- 166 с.
3	Рябенький В.С.	*ЭБС Книгафонд: Введение в вычислительную математику: учебное пособие*	М: Физматлит, 2008.- 285 с.
4	Ракитин В.И.	*ЭБС Книгафонд: Руководство по методам вычислений и приложения MATHCAD: уч.пос.*	М: Физматлит, 2014.- 264 с.

Дополнительная литература

1	ФормалевВ.Ф., Ревизников Д.Л.	*ЭБС Книгафонд: Численные методы: учебное пособие*	М: Физматлит, 2014.- 399 с.
2	ТурчакЛ.И., Плотников П.В.	*ЭБС Книгафонд: Основы численных методов: учебное пособие*	М: Физматлит, 2014.- 304 с.
3	Шипачёв В.С.	Курс Высшей математики	М.:ТК Велби, 2004
4	Письменный Д.Т.	Конспект лекций по высшей математике. Ч 1-2.	М.: Айрис-пресс, 2007

Подписано в печать 19.04.18. Формат 84х108/32

Гарнитура Таймс. Печать офсетная.

Бумага мелованная. Усл. Печ. л. – 1,47

Тираж 50 экз.

Издательство Современного технического университета

390048, г. Рязань, ул. Новоселов, 35А.

(4912) 300630, 30 08 30